Dialogues autour de la création mathématique

Nicolas Bouleau

DIALOGUES

AUTOUR DE LA

CRÉATION MATHÉMATIQUE

réunis par Nicolas BOULEAU

Classification Dewey:
511 Mathématiques. Principes généraux

ISBN 2-9511485-1-8
EAN 9782951148512

Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire d'analyse fonctionnelle
4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05

La théorie du potentiel n'est ici qu'un lieu de rencontre. Il n'est pas besoin d'en être familier pour apprécier les propos qui suivent. Volontairement je n'en donne pas d'aperçu, il suffit de savoir qu'elle prend ses sources historiques dans les théories de la gravitation, de la chaleur et de l'électrostatique et qu'elle constitue aujourd'hui une jonction importante entre l'analyse et les probabilités.

Car il me semble, mais le lecteur en sera le vrai juge, que les observations et remarques des mathématiciens qui s'expriment ici apportent un éclairage sur la création mathématique bien au delà des particularités de ce champ conceptuel.

Ces dialogues sont très personnalisés, avec des mathématiciens avec lesquels j'ai eu l'occasion de travailler qui parlent sans détour et franchement comme des artistes dans leur atelier. Pour certains d'entre eux j'ai choisi d'évoquer les circonstances qui m'ont fait les connaître afin de situer au mieux les propos.

Je crois en effet, qu'il y a une vie relationnelle intense en mathématiques dont les témoignages sont intéressants par eux-mêmes, qu'une certaine conception, apodictique, des mathématiques a trop occulté jusqu'à présent. Le plus important dans les communications entre mathématiciens, et vis à vis des jeunes surtout, n'est-il pas d'échanger des motivations, de faire partager des admirations pour certaines idées ou démarches ? Les mathématiciens sont des hommes et des femmes passionnés, ils ont tout intérêt, à mon avis, à se montrer à l'extérieur tels qu'ils sont : très vivants, plutôt que de se limiter à une surabondante production de publications de moins en moins lues ...

Nicolas Bouleau
Paris, juin 1997

Lagrange déplorait qu'il n'y eut qu'un système du monde à découvrir. Nous serions presque tenté de croire à notre tour qu'on ne trouvera plus une mine aussi féconde que l'ensemble des théories physiques liées à la considération du potentiel newtonien si nous ne savions que, dans les sciences de la nature, nos représentations et nos concepts évoluent avec les progrès de l'observation et de l'expérience ce qui fait que des regrets comme celui de Lagrange ne sont pas justifiés.

Emile Picard

Laurent Schwartz

La théorie des distributions est une généralisation de la notion de fonction qui rend rigoureux des objets limites rencontrés par les physiciens : dipôles électriques, répartitions de charges en double couche, etc. Les fonctions en tant que distributions sont toujours dérivables, les distributions permettent des calculs aisés mais elles ne constituent pas un espace normé, elles nécessitent l'étude des "evtlc" espaces vectoriels topologiques localement convexes — quoiqu'elles fassent aussi l'objet d'exposés pédagogiques plus simples — qui est le cadre choisi pour exposer la dualité des espaces vectoriels par le groupe Bourbaki auquel Laurent Schwartz a participé. La théorie des distributions, malgré sa difficulté, faisait partie intégrante du cours de Laurent Schwartz à l'École Polytechnique ainsi que de l'enseignement de méthodes mathématiques de la physique à l'université. Ce cours était colossal. La théorie de la mesure et de l'intégration y était abordée par les mesures de Radon avec les lemmes de partition de l'unité[1]*, afin de mieux se placer dans l'optique des distributions. Il représentait environ 1800 pages dactylographiées véritable mine d'idées et de méthodes mais impossible à retenir in extenso. Finalement c'était la force des raisonnements dans les espaces de Banach qui imbibait progressivement les élèves-ingénieurs et leur donnait confiance pour aborder les applications.*

Laurent Schwartz est aussi connu du public pour son engagement contre la guerre d'Algérie et contre la guerre au Viet Nam. Son activité pour les mathématiciens en difficulté dans les régimes totalitaires de gauche ou de droite fut sans répit et dure encore. Plus tard il prit position de façon nuancée mais ferme pour la sélection après les excès des 68-ards, sélection qu'il considère non comme une élimination mais

---

[1] qui permettent de représenter la constante 1 comme somme localement finie de fonctions régulières à support compact.

comme des recommandations éventuellement contraignantes d'orientation pour le choix des filières.

Cet engagement lui donnait évidemment dans une école militaire aussi traditionnelle que Polytechnique une aura toute particulière. Il entrait dans l'amphi, le veston déséquilibré par le poids de la boîte émettrice du micro qu'il redressait d'un geste automatique et périodique, l'effet comique ne durait pas, dès qu'il commençait à parler, si simplement, le silence se faisait. Le rythme de la leçon était soutenu, le tableau se partageait en cases rectangulaires, et il expliquait les démonstrations — en clignant des yeux à cause de la poussière de craie — comme s'il s'agissait d'un jeu facile "Si vous êtes dans une île déserte, souvenez-vous que pour démontrer le théorème de Fischer-Riesz il suffit d'utiliser que si la série des normes converge alors ..."

Plusieurs années plus tard, ayant obtenu enfin de pouvoir faire une thèse dans le cadre du décret Suquet, je fus affecté au centre de mathématiques de l'École Polytechnique que Laurent Schwartz avait fondé et qu'il dirigeait.. Il avait tourné ses recherches personnelles vers les probabilités ce qui me donna l'occasion d'une collaboration qui se poursuivit après la thèse et conduisit à un travail en commun sur les fonctions convexes et les semi-martingales. A partir de ce moment il fut convenu que nous nous tutoyions, facilité que Schwartz a très naturellement.

Il conviendrait aussi de parler de ses 19000 papillons et des cinq espèces qui portent son nom, mais ceci nous mènerait trop loin[2]*...*

[2] A propos de la façon de Laurent Schwartz de pratiquer les mathématiques, on peut consulter
L. Schwartz, *Historical roots and basic notions in the theory of distributions,* Panepistemio Patron (1982); *De certains processus mentaux dans la découverte en mathématiques,* revue des sciences morales et politiques (1987); *Souvenir d'un mathématicien,* conférence au Palais de la découverte (1991); *Laurent Schwartz, entretien* Ecole Polytechnique (1995); voir également le chapitre de ses mémoires (Odile Jacob 1997) que Laurent Schwartz consacre à la théorie des distributions.

N. B. *Une distribution, c'est maintenant un élément du dual de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, ce n'est plus une répartition de charges électriques ...*

L. S. On n'a plus besoin de les penser comme ça maintenant. Je manie les distributions mais je ne sais pas très bien comment je me les représente, lorsque j'essaye de voir une distribution j'imagine une fonction un peu grisâtre.

— *Si l'on établit un parallèle entre création mathématique et création architecturale, parallèle qui peut être poussé assez loin, on est frappé par une différence criante : alors que les architectes expliquent largement leur processus de création et publient leur esquisses et leurs démarches, il n'y a rien de tel chez les mathématiciens qui ne fournissent que des œuvres parachevées.*

C'est une habitude, on pourrait ne pas faire comme ça. Les ébauches d'un peintre sont considérées comme passionnantes, celles d'un mathématicien par habitude sociale imposée on n'en donne pas les étapes. Ceci dit, lorsque je fais un amphi, je montre toujours comment on arrive là. Les étapes de ma recherche je les connais, je sais par où je suis passé et où j'ai souffert pour obtenir tel ou tel résultat. C'est simplement que les éditeurs n'en veulent pas et que Bourbaki a imposé un style tellement concis qu'on ne peut plus expliquer ce qu'on fait, il y a beaucoup d'autres styles qui sont plus explicatifs et meilleurs.

Nous sommes des comédiens, on aime séduire. Le principe de la pédagogie que j'ai toujours appliquée, c'est de répéter plusieurs fois les choses de manière différente de façon à trouver tous les moyens de séduire les gens qui sont en face de moi et de sentir qu'ils ont compris. Je n'ai jamais dénaturé au point que je les trompe. Je cherche à les intéresser exactement comme le comédien devant son public qui le soutient. Un comédien ou un tragédien qui ne joue devant personne ce n'est pas commode.

— *En recherche faut-il attribuer de la valeur à ce qui est simple ?*

Je cherche en zigzags et j'arrive finalement plus près du point départ que je n'avais pensé. Alors j'éprouve le besoin de trouver le plus court chemin conduisant à ce résultat et d'oublier les étapes par lesquelles je suis passé. Néanmoins le plus court chemin est très déductif. J'essaye aussi de trouver le plus court chemin intuitif, mais c'est tout un travail. Si on prend le théorème de Hahn-Banach par exemple, c'est très net: si tu dis à quelqu'un qui est bon mathématicien est-ce que toute forme linéaire continue sur un sous-espace de Banach se prolonge en une forme linéaire continue, a priori il ne trouve pas, si tu lui dis est-ce que toute forme linéaire continue sur un sous-espace de Banach se prolonge à l'espace entier avec la même norme, alors probablement il trouve, si tu lui dis maintenant est-ce que toute forme linéaire sur un sous-espace majorée par une semi-norme positive définie sur tout l'espace se prolonge en une forme linéaire avec la même majoration, il montera en dimension et tout marchera tout seul. Le coup de génie de Hahn et Banach a donc été de ne pas se poser le problème simple mais un problème a priori plus compliqué.

— On sait en logique qu'un énoncé simple peut ne pouvoir être démontré que par une très longue chaîne déductive.

J'essaye de trouver la plus courte, si je ne peux pas, je ne peux pas. Si je suis obligé de faire une série de lemmes idiots que je ne peux éviter, eh bien tant pis je le publie comme ça. Pour ces raisons je ne publie un théorème que pas mal de temps après l'avoir trouvé si je suis sûr que je ne peux pas raccourcir. C'est la raison pour laquelle le livre sur les distributions a presqu'une forme finale.

— Ne penses-tu pas qu'il serait intéressant de publier aussi des choses qui sont dans un état d'inachèvement, des brouillons ...

Pas des brouillons mais des choses inachevées, lorsqu'on n'a résolu qu'une partie du problème. Je pense qu'il faudrait le faire. Il y a des conjectures qui sont intéressantes et qui sont motivées. J'ai fait pas mal de conjectures dans ma vie que j'ai assez souvent publiées. La question de la division des distributions en est une. Par exemple la théorie des fonctions moyennes périodiques qui est un de mes premiers travaux en 1937 où je démontre un théorème très profond mais en dimension 1, et la question se pose immédiatement pour les dimensions supérieures. J'ai complètement séché. Je l'ai posée à Malgrange qui a trouvé une partie mais pour le reste a séché. Toute une génération de gens a cherché à passer de la dimension 1 à la dimension 2, et conjecturé que c'était vrai. Il fallait utiliser les fonctions de plusieurs variables complexes que moi-même je ne maniais pas bien. Gurevitch a donné un contre exemple il y a dix ans, c'était 30 ans après la parution de mon article, tous les mathématiciens découragés avaient cessé de s'y intéresser.

— *Si tu avais à parler de ton plaisir en mathématiques tu le qualifierais comment ?*

Le plaisir est très multiple, par exemple j'aime sécher. Pas vingt ans, mais j'aime sécher. Parce que quand on cherche on ne met peut-être pas assez de tension et d'activité. Quand on commence à sécher comme par exemple sur la convergence dans L^p ($p \neq 2$) de la série des décompositions en chaos d'une variable aléatoire de L^p sur l'espace de Wiener dont on a parlé récemment, alors à ce moment là mon organisme se tend, je mets toute mon énergie. Je travaille toute la journée sans m'interrompre, et je me tends tellement que toujours je trouve quelque chose, parce que je suis un mathématicien tout de même.

Et cette question de savoir si les seules fonctions qui opèrent sur les semi-martingales sont les fonctions convexes que nous avions travaillée ? On n'a pas trouvé, mais je garde ça derrière la tête si un jour j'ai du temps.

La conjecture qui reste est de savoir si une fonction dont la dérivée seconde est une matrice hermitienne de mesures opère sur les semi-martingales. On ne sait pas.

J'ai plaisir à sécher parce que l'organisme se tend d'une manière telle qu'on en ressent presqu'une jouissance physique. On sent qu'on avance. On sent qu'on ne trouve pas ce qu'on veut mais qu'on avance. Je me dis ce soir j'en saurai plus que ce matin. Cette question d'avance c'est un peu comme quelqu'un qui monte une montagne si tu veux. Je n'éprouve pas le désir de faire l'aiguille verte par une face plutôt que par une autre, je ne cherche pas spécialement la tension. Mais si je veux quelque chose, alors j'y mets de la tension, ce moment là est une jouissance.

J'ai dit parfois que si j'étais enfermé sur une île déserte comme Robinson Crusoe sans espoir d'en sortir, je crois que j'y ferais de la recherche en mathématiques et même de l'enseignement !

Gustave Choquet

"L'intérieur du complémentaire est-il le complémentaire de l'adhérence ? "Une réunion dénombrable de fermés sans intérieur est-elle encore sans intérieur ?" C'était à l'Institut Henri Poincaré vers la fin des années 60, le "séminaire d'initiation à l'analyse" de Gustave Choquet suivait en continuité le cours de troisième cycle. Il consistait véritablement en une joute cordiale avec les étudiants sur des thèmes d'approfondissement. Rien à voir avec ces séances d'exposés qu'on appelle aujourd'hui séminaires. L'attitude des mathématiciens reconnus vis à vis des débutants est cruciale, le témoignage que j'apporte ici rejoint celui de beaucoup de mathématiciens.

Les étudiants étaient nombreux et, à la différence des normaliens qui prenaient leur engagement vers la recherche très au sérieux, je venais en amateur comme d'autres élèves des Ecoles d'ingénieurs sans savoir si l'activité mathématique était pour nous une éventualité raisonnable. Nous n'osions pas après la séance nous approcher parmi ceux qui avaient une question à poser.

Pourtant j'avais une idée à soumettre. Mais il me fallu près d'un an pour me résoudre à la rédiger et à l'adresser par écrit à Laurent Schwartz et à Gustave Choquet. De façon très encourageante Schwartz me répondit le jour même que c'était "assez fort de trouver encore quelque chose en topologie générale". La réponse de Choquet me parvint quelques semaines plus tard. Elle était longue et détaillée. Le sujet, ancien, remontait à la célèbre erreur que Cauchy avait faite en croyant qu'une suite convergente de fonctions continues convergeait vers une fonction continue, erreur qu'il avait corrigée plus tard en introduisant la notion de convergence uniforme. Ce dont je m'étais aperçu c'est qu'il existait un mode de convergence intermédiaire entre la convergence en chaque point et la convergence localement uniforme et qui était une condition nécessaire et suffisante pour que la limite fût continue. La *lettre de Choquet me proposait un vocabulaire nouveau, évoquait des connexions à travailler avec les théorèmes d'Ascoli et d'Arzela, posait des questions quant à la stabilité pour cette topologie d'autres propriétés des fonctions telle que mesurabilité, classes de Baire, etc. Je sais aujourd'hui que l'enjeu de cette découverte était en fait purement académique. Mais j'avais partagé un intérêt avec deux mathématiciens. Une forte motivation était née en moi. Grâce à elle je pu faire l'apprentissage nécessaire pour retrouver Choquet plusieurs années plus tard en théorie du potentiel, domaine qu'il présentait dans ses "Lectures on Analysis"*[3] *comme un lieu d'application privilégié de son enseignement.*

Là, le langage géométrique de Gustave Choquet était la langue officielle. Les espaces fonctionnels les plus abstraits étaient dessinés sur le tableau comme s'il s'agissait de géométrie élémentaire et d'ailleurs Choquet épurait tant les problèmes, qu'en effet, ils se ramenaient à des raisonnements que la figure rendait fidèlement.

L'œuvre de Choquet est considérable. Il est surtout connu pour deux ensembles de travaux, l'un concernant les frontières, les simplexes, les cônes faiblement complets et la représentation des mesures comme barycentres de mesures portées par les points extrémaux, splendide théorème avec lequel on peut obtenir immédiatement plusieurs théorèmes fondamentaux d'analyse fonctionnelle, l'autre relatif à la théorie des capacités, notion d'électrostatique utilisée par Norbert Wiener pour l'étude des irrégularités en théorie du potentiel, qu'il a généralisée en une véritable théorie de la mesure non linéaire et son théorème de capacitabilité des ensembles analytiques a trouvé une application directe en probabilités pour démontrer la mesurabilité des temps d'entrée. Mais au delà de ces deux grandes investigations, ses très nombreux travaux montrent une ouverture et une disponibilité d'esprit impressionnante pour transformer des questions apparemment anecdotiques en problèmes plus généraux et parvenir à les résoudre par des principes et des concepts applicables ailleurs[4]

[3] Benjamin 1968

[4] A propos de la façon de Gustave Choquet de pratiquer les mathématiques, on pourra consulter :

N.B. *Une des caractéristiques de votre style de mathématicien est que vous êtes un introducteur de concepts. Qu'est-ce qui, à vos yeux, légitime l'introduction d'un concept nouveau, je pense par exemple à la notion de "chapeau" ou à celle d' "espace de Banach adapté", est-ce son efficacité dans le raisonnement, est-ce le résumé des propriétés qu'il représente?*

Je suis un intuitif et un géomètre, je vois les choses en grandes masses. Une part du travail de recherche se passe de façon souterraine, subconsciente, peut-être inconsciente. Pour moi le déclenchement se fait par la rencontre de certains problèmes.

La notion de chapeau ? Je cherchais des exemples de cônes faiblement complets qui n'aient pas d'éléments extrémaux. Or les cônes faiblement complets même non métrisables peuvent s'obtenir comme limites projectives de familles bien ordonnées de cônes plus simples; on prend un cône puis un autre qui est au dessus dans un espace produit, etc., on obtient un cône limite et on recommence de proche en proche. J'éliminais ainsi progressivement des éléments extrémaux. Plus tard j'ai trouvé des cônes classiques faiblement complets sans éléments extrémaux, il suffisait de prendre L^2 avec sa topologie faible mais, à cette époque, je ne le savais pas et je ne connaissais comme cônes sans éléments extrémaux que les exemples obtenus par ces limites et éliminations successives. J'étais alors avec ma femme à Fontainebleau dans une auberge où nous passions nos vacances et toute la matinée j'avais étudié sur un petit poste de radio l'influence sur la réception de sa position par rapport aux tuyaux de chauffage central: je donne ces détails pour souligner que mon occupation n'avait rien à voir avec mes recherches mathématiques antérieures.

G. Choquet, *Peut-on renouveler ses champs d'intérêt, essai de réponses concrètes,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 38, 241-255, (1990); *La naissance de la théorie des capacités: réflexions sur une expérience personnelle,* La vie des sciences, C. R. A. S. série générale t.3 n4 (1986); *Formation des chercheurs en mathématiques* Chantiers de pédagogie de l'APM, 72-83 (1973); *Le continu, le discret ... et tout le reste* conférence à Cérisy la Salle(1990).

Nous partons en promenade; je mets le pied sur la petite marche qui, de notre chambre, donnait accès au sable de la forêt. Et, comme Poincaré qui, en un éclair avait compris les relations entre fonctions fuchsiennes et géométries non-euclidiennes en mettant le pied à Coutances sur le marchepied d'un omnibus, je compris brusquement sur cette petite marche, que dans un cône, s'il y a des écailles compactes, telles que les copeaux qu'une lame bien aiguisée détache d'une branche pointue, il y aura des éléments extrémaux.

Le rapport entre ces entailles et ma technique antérieure d'élimination d'éléments extrémaux reste encore pour moi un mystère, mis à part le fait que dans cette technique apparaissaient, dans un arrière-plan brumeux, des tranches compactes fugitives. Je crois aujourd'hui que cette idée vague avait mis en branle l'activité de mon subconscient, bien que mon objectif initial ait été de fabriquer des cônes sans éléments extrémaux, alors que ma brève illumination allait me faire cadeau allait me faire cadeau d'une classe de cônes ayant eux, de très nombreux éléments extrémaux.

- Branche pointue, lame aiguisée, petits copeaux, pointus d'un côté et plats de l'autre.

- Cône convexe, hyperplan, convexes compacts de complémentaire convexe.

En quelques pas dans le sable m'était apparue l'analogie, pour moi percutante, de ces situations. Puis en quelques minutes, la théorie de ces copeaux (baptisés plus tard *chapeaux* en souvenir des chapeaux chinois) était en place; et revenu dans ma chambre il ne me resta plus qu'à vérifier la cohérence mathématique de cette vision.

Mais finalement pourquoi m'être attaché à ce concept de chapeau et en avoir développé les conséquences ?

Tout simplement parce que ce concept résolvait un problème intéressant, au départ assez caché, celui de fournir des conditions pour que dans un cône faiblement complet, il y ait des éléments extrémaux,; et puis, la théorie me semblait si jolie que cela seul était une justification suffisante. Le concept de chapeau réussissait: élégance, simplicité et puissance dans les applications.

Voici un autre exemple, la théorie des jeux topologiques. J'avais toujours été attiré, dès l'Ecole Normale, par les espaces de Baire, d'abord dans les travaux de Baire, puis dans Bourbaki. Dans ce dernier, la définition purement formelle d'un espace de Baire laissait le lecteur sans aucun moyen d'en fabriquer de nouvelles classes, dont la recherche me stimulait. En analysant ce qui se passait dans les espaces métriques complets, j'avais bien vu la structure qu'il fallait dégager, ce qui m'avait conduit à définir les espaces tamisables; puis quelques années plus tard — je ne me souviens plus pourquoi — je m'aperçus qu'il y avait là une sorte de jeu à deux personnes puisque dans la définition des espaces tamisables, il y a comme une compétition entre deux opérations successives, indéfiniment répétées. C'était vague dans mon esprit, mais brusquement je pris conscience que c'était effectivement un jeu à deux joueurs a et b , ce jeu me conduisit à la notion d'espace a-favorable, puis d'espace a-fortement favorable.

— *Etait-ce avant l'apparition de la théorie descriptive des ensembles et les travaux de Moschovakis et de Louveau sur la hiérarchie projective?*

Oui, cela n'existait pas. Il ne s'agissait d'ailleurs pas pour moi de détermination des boréliens mais de questions topologiques. C'est ensuite une question de Dixmier qui m'a fait voir que ces espaces a-favorables étaient fort intéressants pour l'étude des espaces d'opérateurs, ainsi que pour les convexes compacts et leurs points extrémaux.

Dans les deux exemples que je viens d'étudier assez longuement, on devine en filigrane mon goût assez marqué pour une géométrisation des situations mathématiques. Je pense que ce goût a pour origine — outre la structure initiale de mon cerveau — l'empreinte que mon instituteur M. Flamand a laissée sur l'enfant que j'étais. Il nous conseillait toujours pour résoudre des problèmes élémentaires à deux inconnues — par exemple au sujet de canards et de poulets à vendre au marché — non pas d'appliquer une recette (ce que nous appelons aujourd'hui un algorithme), mais de les interpréter par des segments portés par une ou deux droites parallèles; ce schéma n'avait évidemment plus rien de commun avec poules et canards. Il m'avait donné le goût de la géométrisation des situations.

Aussi lorsqu'au lycée on nous donnait des problèmes concernant les trinômes, dépendant ou non d'un paramètre, je commençais, avant tout calcul algébrique par tracer le graphe des trinômes en question; je considérais le calcul algébrique obligatoire ensuite, comme au mieux une vérification, ou tout simplement comme un pensum.

Ce goût pour la géométrie visuelle m'a suivi toute ma vie; pour moi la géométrisation des problèmes et des relations est une méthode purificatrice et simplificatrice; j'ai fait tout mon possible pour en transmettre le goût à mes étudiants. J'ai écrits peu d'articles nécessitant des calculs; s'il le faut je les fais, mais les mettre bout à bout me donne beaucoup de mal me fait littéralement souffrir.

Je me souviens en particulier de deux d'entre eux: le premier consistait à montrer que pour un Gδ euclidien[5] de capacité newtonienne nulle, il y avait toujours une mesure de Radon positive sur le Gδ dont le potentiel est infini sur ce Gδ et fini partout ailleurs (propriété d'ailleurs sans grandes conséquences) ; une réflexion rapide m'avait persuadé que c'était vrai et je l'avait annoncé sans preuve. Ce ne fut que lorsqu'un collègue japonais émis des doutes que je me crus obligé de rédiger une preuve, et ce travail me fut pénible!

Le second, inspiré par l'observation des cages de Faraday grillagées, et nettement plus intéressant, me coûta également beaucoup de travail alors qu'une réflexion rapide, mais soutenue par le fait qu'une cage grillagée est aussi efficace qu'une cage aux parois pleines, m'avait convaincu du résultat.

— La logique nous apprend que nonobstant le caractère déductif et discret des mathématiques formalisées on ne peut prétendre les obtenir avec une machine. Autrement dit, en termes techniques les théorèmes forment un ensemble récursivement énumérable non récursif. Ce qui signifie que soit le programme informatique fournit des théorèmes dans un ordre qui lui est propre, soit, si on impose l'ordre, on ne sait si la machine trouvera le théorème en un temps fini ou non. Ne pensez-vous pas qu'il y a là une réhabilitation de la dimension conceptuelle du travail des mathématiciens?

---

[5] intersection dénombrable d'ouverts

Je n'ai pas travaillé en logique proprement dite mais au contact de Church, en 1938, j'ai approché ces questions. Notamment, dans une conférence à Cérisy la Salle en 1990 sur le continu et le discontinu j'ai parlé de tout cela en remarquant par exemple qu'on ne peut pas construire une suite au hasard.

Autre exemple, qu'est ce qu'un nombre réel ? Les nombres que l'on peut construire, e, π, etc. ne sont qu'en infinité dénombrable. Alors les autres qui constituent la quasi-totalité des nombres que sont-ils ? Quel est leur rôle ? A quoi servent-ils? Je leur attribue un rôle de sociabilité, ils servent à rendre plus commode certains énoncés, sur la compacité par exemple.

— *Restons en logique et supposons que les logiciens travaillent si bien qu'on arrive à de nombreux axiomes non compatibles les uns avec les autres et conduisant à des mathématiques différentes mais apparemment intéressantes. Alors que fait-on? Faut-il garder l'axiome du choix et le théorème de Hahn-Banach quoique Paul Cohen ait montré que son contraire marchait aussi bien? L'unité des mathématiques est-elle à préserver?*

C'est aux mathématiciens à dire ce qu'ils veulent. De toute façon les mathématiques vont dans certaines directions parce que cela a plu à tels mathématiciens d'y aller. C'est lié a l'alternative découverte ou construction. Est-ce qu'on découvre quelque chose ou qu'on l'invente ? A mon avis la question est mal posée et ceux qui répondent dans un sens ou dans l'autre n'ont pas bien compris de quoi il s'agit. Si vous partez d'un certain système d'axiomes, alors de façon formelle il y a tout un réseau de conséquences qui en résulte logiquement. Et ce réseau, il existe, il est là et on peut dire de toute éternité pourrait-on dire. Si on parvenait à le connaître en entier ce serait véritablement une découverte. Mais on ne peut le découvrir en entier, alors que fait le mathématicien? Il dispose d'une sorte de lanterne, celle de son intuition et de ses goûts liés à son passé: à chaque instant il va éclairant le chemin devant lui, créant des notions et progressant ainsi de proche en proche dans ce réseau. Le travail du mathématicien est donc une invention dans un schéma global inconnaissable puisque sa découverte est impossible à l'homme. Le théorème que l'on cherche existe de toute éternité, mais pour le formuler puis le découvrir il faut inventer un chemin.

— Vous donnez là une explication syntaxique. N'y a-t-il pas aussi le fait que le mathématicien utilise le sens pour travailler, donc ses inventions vont se concrétiser par des étapes qui sont des concepts intermédiaires sur lesquels on aura mis une sorte de point d'orgue qui signifiera que c'est un concept important et le fait de décerner cette qualité à cet assemblages de signes est une invention.

En effet, on est parfois encouragé à aller dans une direction par un énoncé qui plaît par sa beauté ou par son efficacité et parce qu'en cours de route on trouve une notion qui simplifie beaucoup de choses, telle que la notion de groupe par exemple. Parfois cela se fait en une journée, ou en un an, parfois il faut plusieurs générations humaines; les groupes de Lie par exemple ont eu une lente élaboration.

Il en va de même lors du choix des axiomes, partant par exemple d'une axiomatique de la théorie des ensembles, parmi les axiomes qu'on peut rajouter quels sont ceux qu'on va déclarer intéressants? C'est un choix purement humain. Il n'y a que l'homme qui peut dire: moi ça m'intéresse. Au contraire la machine construirait des énoncés qui ne nous intéressent pas.

— Comment décrire votre plaisir à faire des mathématiques?

Une chose est certaine, toute ma vie je n'ai fait que des mathématiques qui me plaisaient et je plains les chercheurs motivés uniquement par l'espoir de promotions et de récompenses. Je me souviens en particulier de mes débuts dans la recherche. Si je m'étais intéressé alors à des sujets à la mode j'aurais acquis une plus grande réputation mais cela ne me venait pas à l'esprit. Je passais parfois un mois, deux mois sur des problèmes qui, je le savais, ne conduisaient à rien de fondamental, par exemple sur le problème de la tasse de thé:

C'est là un exemple typique du genre de chose que j'ai faites à mes débuts. Vous avez une tasse de thé et vous supposez qu'elle est alimentée par un mince tuyau de sorte que son niveau va rester constant durant toute l'expérience. Vous avez par ailleurs une biscotte que vous plongez verticalement dans la tasse et dont vous mangez la partie mouillée. Profitant du fait que cette partie a été mangée vous pouvez tourner la biscotte et la plonger davantage. De deux choses l'une ou bien vous arrivez à manger toute la biscotte ou bien celle-ci prend une forme d'équilibre (convexe) telle que vous ne puissiez plus la plonger dans le thé. Vous n'imaginez pas le temps que j'ai pu passer à tenter de savoir s'il y avait d'autres formes d'équilibre que le cercle. Uniquement par plaisir, un plaisir à l'état pur bien qu'un peu frustrant d'ailleurs car c'est un problème très difficile et je ne l'ai pas résolu. Tous les problèmes que je résolvais durant ces années étaient des problèmes issus du monde quotidien. Par exemple je m'étais posé tout seul le problème du jeu de Nim et en me demandant comment jouer au mieux, j'avais découvert la tactique de la numération binaire, tactique bien connue maintenant, et qui l'était peut-être déjà d'ailleurs mais je ne m'en souciais pas.

Voici un autre exemple de mes premières recherches. C'est lui aussi un problème issu de l'observation du monde: on a un certain nombre de villes, en France par exemple, il s'agit de construire un réseau de routes de longueur totale minimale permettant d'aller d'une ville quelconque à une autre, autrement dit connexe. J'ai trouvé un algorithme permettant de construire un tel réseau minimal. Et je l'ai annoncé dans une note, une de mes premières notes aux CRAS. Et puis un jour un polytechnicien qui s'intéressait aux hypergraphes m'apprit que mon algorithme venait d'être redécouvert et était connu maintenant sous un autre nom. Cet algorithme recherché par jeu pouvait donc finalement avoir des applications.

Mais ce fut un peu plus tard, lors de la rédaction de ma thèse en 1945, que je pris nettement conscience qu'une recherche faite par jeu, pouvait déboucher sur la création d'un outil de portée générale. Je résolvais dans cette thèse trois problèmes posés par Lebesgue, Fréchet et plus implicitement par Baire; mais ce n'est qu'à la fin de sa rédaction en cherchant pour la terminer un principe commun aux démonstrations de ces trois solutions, je réussis à dégager un théorème général que j'appelai théorème du contingent-paratingent parce que dans la géométrie différentielle des fermés euclidiens, il affirmait l'identité générique du contigent et du paratingent étudiés par Bouligand. mais la généralité du cadre dans lequel je l'énonçais permettait, entre autres corollaires, d'obtenir fort simplement les trois théorèmes que Denjoy avait énoncé comme clés de ses diverses totalisations.

Désormais, bien que l'aiguillon essentiel de mes recherches restât toujours le plaisir aigu d'éclaircir des énigmes, de résoudre des problèmes difficiles posés par moi-même ou par d'autres, il s'y ajoute comme venu d'une seconde nature, un souci du choix du cadre et des méthodes permettant de faire du résultat obtenu un outil de portée générale.

Paul Malliavin

Un souvenir marquant que j'ai de Paul Malliavin est un exposé à l'Ecole Normale au début des années 80. Il commençait à attirer les probabilistes par des considérations assez nouvelles dont je ne percevais d'ailleurs que vaguement les enjeux à cette époque. J'y allais pour mieux situer les choses. Mais au bout de quelques instants ce que je comprenais clairement n'était plus que quelques îlots dans une mer énigmatique et le tableau noir sur lequel mes yeux cherchaient désespérément des secours d'urgence s'était transformé en un pictogramme indéchiffrable proche de Kandinsky ou de Jackson Pollock. Pourtant les yeux de l'orateur et son ton presque confidentiel transmettaient une telle intensité, qu'on ne pouvait s'y tromper, il y avait là des choses importantes...

C'était l'époque où, de retour du Japon, Paul Malliavin commençait à divulguer en France ses idées sur certaines façons de mélanger le calcul des variations et le calcul stochastique. Il s'agissait d'une méthode d'investigation, un programme de recherche bien engagé déjà mais prometteur largement au delà.

Il convient que je donne une esquisse de cette partie de l'œuvre de Paul Malliavin, ne serait-ce que pour faire entrevoir la motivation qu'ont vécue les chercheurs qui se sont lancés dans cette nouvelle jonction entre analyse et probabilités.

Depuis qu'en 1933 Kolmogorov, s'appuyant sur les travaux de Lebesgue et de Borel, avait fait accepter le cadre mathématique du calcul des probabilités qui permettait d'établir les grands résultats des Bernoulli, des de Moivre, des Laplace, etc., et d'aller plus loin, les probabilistes travaillaient avec le "triplet probabiliste" noté usuellement $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ *formé d'un espace* Ω*, d'une famille* $\mathbf{A}$ *de parties de cet espace appelées événements et d'une probabilité* P *qui attribue un poids à ces événements. Une variable aléatoire est alors une fonction* $f(\omega)$ *définie en chaque point* ω *de* Ω *et sans autre vertu particulière que d'être* *mesurable pour qu'on puisse envisager les événements qu'elle définit. Ce cadre abstrait, très souple, permet à la fois de développer la théorie et d'englober toutes les situations concrètes depuis les jeux de hasard jusqu'au traitement du signal. Une chose reste interdite cependant, c'est de dériver par rapport à ω. C'est un non sens de considérer la différentielle de f parce que Ω n'a pas de structure particulière, c'est seulement un ensemble muni d'une probabilité. L'idée extrêmement féconde de Malliavin consiste à remarquer qu'un tel calcul différentiel devient possible si on suppose simplement qu'en plus du triplet probabiliste on dispose sur Ω d'un opérateur du même type que ceux qu'on rencontre justement en théorie des probabilités pour qualifier le comportement instantané des processus de Markov*[6]. *Ceci s'applique notamment au cas du triplet probabiliste de Wiener c'est à dire l'espace du mouvement brownien. On peut alors dériver une variable aléatoire définie sur les trajectoires browniennes. Par rapport au calcul différentiel usuel une difficulté apparaît cependant : de même que le plan tangent d'une sphère est hors de la sphère, de même, n'importe quel accroissement au voisinage d'une trajectoire brownienne n'est plus dans l'espace Ω sur lequel seul est définie la probabilité P, il faut se limiter à certains accroissements particuliers qui permettent de rester dans Ω mais qui sont loin de le remplir entièrement. Donc tout n'est pas aussi simple qu'à l'ordinaire mais l'outil marche, et les conséquences s'accumulent. On peut définir des variables aléatoires indéfiniment dérivables en ce sens nouveau et même construire sur l'espace du mouvement brownien des théories des distributions, qui ne sont plus celles de Schwartz, mais de Watanabe ou de Hida ou d'autres encore. Avec ces outils bon nombre de résultats ont été obtenus sur des problèmes anciens et de nouvelles questions sont posées...*

— Vous avez commencé dans l'analyse harmonique et les variables complexes puis vous êtes allé vers les probabilités...

---

[6]processus aléatoires ayant la propriété que la loi de probabilité de l'évolution future ne dépend de ce qui s'est déjà passé que par l'état présent.

J'ai commencé dans l'analyse complexe, ma thèse, parue aux Acta[7], était en théorie d'une variable complexe, l'analyse harmonique est venue ensuite en connexion avec le théorème de Paley-Wiener, c'était le passage[8].

La théorie d'une variable complexe a des liens étroits avec la théorie du potentiel. Le comportement à l'infini du logarithme d'une fonction holomorphe est essentiellement l'étude d'une fonction sous-harmonique dont les masses sont données si on connaît les zéros. Les théorèmes de Harnack jouent un rôle important. Dans la théorie relative au demi-plan on représente cette fonction sous-harmonique par son intégrale de Poisson moins un potentiel avec une masse à l'infini si la fonction a une croissance exponentielle. La positivité du potentiel de Green améliore les estimations. Au contraire pour les fonctions entières, on n'a pas de potentiel positif puisqu'on est dans tout le plan. Néanmoins j'ai montré que si on restreint une fonction de type exponentiel à une droite ou une demi-droite, on peut retrouver des noyaux positifs. J'ai publié ça dans l'Illinois journal et avec Beurling nous avons construit une théorie plus élaborée qu'avec le logarithme, en particulier nous avons résolu la question de savoir si, lorsqu'on se donne une fonction croissante p sur la droite, on peut trouver une fonction entière de type exponentiel φ telle que $p\varphi$ soit bornée. C'est lié aux hyperdistributions. Il y a interaction entre fonctions entières et analyse harmonique, dans les deux sens.

— Qu'est-ce qui vous a conduit aux fonctions de plusieurs variables complexes ?

C'était toujours lié à des questions de théorie du potentiel. Pour les fonctions harmoniques les théorèmes de Lusin et Calderon donnent une équivalence de norme L^p avec celle obtenue en prenant l'intégrale du carré du gradient dans un cône issu d'un point frontière. Notez bien que cette équivalence n'est pas conséquence directe de l'interprétation en terme de martingales avec ce que Paul André Meyer a appelé le "carré du

[7] Acta Mathematica, revue suédoise très renommée.
[8] le théorème de Paley et Wiener caractérise les transformées de Fourier des fonctions à support compact comme une certaine classe de fonctions holomorphes.

champ"[9]. Nous avons fait la même chose avec ma femme pour le bidisque, c'est plus délicat, le gradient est à remplacer par un gradient itéré en chacune des deux variables. Nous avons travaillé 7 ou 8 ans sur cette question qui a ensuite intéressé l'école de Chicago autour de Robert Fefferman, puis Stein et Gundy qui ont amplifié nos résultats. Debiard a écrit un mémoire dans le JFA[10] en 1981 sur l'intégrale d'aire pour les fonctions dans le demi-espace au dessus du groupe de Heisenberg.

— Ce qui m'intéresse particulièrement ici ce sont les connexions entre diverses interprétations notamment avec les probabilités...

Justement. Je recherchais des estimées explicites pour faire de la théorie du potentiel, en plusieurs variables complexes, alors il y a un phénomène tout à fait nouveau : il y a beaucoup de métriques pour lesquelles les fonctions holomorphes sont des fonctions harmoniques. C'est lié au beau livre de Weil sur les variétés kähleriennes[11]. Le laplacien associé à une métrique kählerienne s'écrit en coordonnées holomorphes $\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}$ où la matrice a_{ij} est hermitienne positive. Je souhaitais calculer les fonctions de Green dans ces situations.

Là, j'ai commencé à utiliser les probabilités. A Princeton en 1972, travaillant sur ces questions, j'ai mis au point un lemme de comparaison qui permet d'estimer la fonction de Green en fournissant un encadrement, trajectoire par trajectoire, du processus de diffusion projeté de la diffusion initiale et de deux processus associé à des opérateurs

---

[9] Parmi les fonctions dont la valeur au bord d'un ouvert est fixée, la solution du problème de Dirichlet, c'est à dire la fonction harmonique, est celle qui minimise l'intégrale du carré du gradient. Si une fonction est le potentiel de charges électriques, son gradient est le champ électrique, on voit que le "carré du champ" joue un rôle important en théorie classique du potentiel. C'est dans la thèse de J.P. Roth qu'il est montré semble-t-il pour la première fois que cette notion peut servir à caractériser les opérateurs susceptibles d'engendrer une théorie du potentiel. P.A. Meyer en a donné une interprétation probabiliste qui est au cœur de ses travaux sur les inégalités de Littlewood-Paley et qui a donné lieu à de nombreux prolongements. Le "carré du champ" appliqué à une fonction s'interprète de façon probabiliste comme la densité du "crochet" de la martingale associée à la fonction, un outil analytique se trouve ainsi relié à un outil de calcul stochastique.

[10] Journal of Functional Analysis.

[11] André Weil, *Introduction à l'étude des variétés kähleriennes,* Paris 1958.

différentiels dont les termes du 1er ordre sont modifiés. Cela a donné beaucoup de choses, notamment que la fonction de Green dans un ouvert strictement pseudo-convexe[12] de $\boldsymbol{C}^n$ croît comme d^n à la frontière où d est la distance du point au bord pour la métrique kählerienne. Il n'y a pas à ce jour d'autre démonstration connue que par ce lemme probabiliste.

— Vers quoi allait votre motivation durant cette période ?

La théorie du potentiel, c'était ma motivation. Les probabilités se montraient un outil intéressant.

— Qu'est-ce qui vous a fait vous engager dans cette connexion entre probabilités et analyse qu'est le calcul des variations stochastiques que vous avez si fortement marqué qu'on l'appelle couramment "le calcul de Malliavin" ?

C'est une longue histoire. J'ai été beaucoup influencé par des amis. J'étais au MIT en 1973, B. Kostant m'a signalé le problème de réalisation de *la série discrète,* qui touche aux représentations des groupes et aux spineurs de Dirac et j'ai essayé de démontrer un théorème d'annulation de la cohomologie L^2 par des techniques d'analyse stochastique qui avaient été un succès pour la fonction de Green.

Dans ce but il y eut plusieurs travaux avec ma femme sur l'asymptotique de la diffusion horizontale sur un espace symétrique. Mais c'est à propos des intégrales oscillantes qu'apparut avec force l'intérêt d'un calcul des variations stochastiques. Si vous prenez une forme différentielle qui n'est pas exacte et si vous regardez l'intégrale d'une diffusion en conditionnant pour avoir un lacet, un pont brownien si vous voulez, vous revenez avec une valeur différente. C'est ce que j'ai appelé *l'holonomie stochastique*. Cela concerne des formes différentielles à valeurs matricielles parce que c'est lié au calcul des variations, mais même dans le cas scalaire il y a des estimées asymptotiques importantes ce sont ces intégrales oscillantes. Ceci a été traité par Gaveau dans sa thèse publiée aux Acta où il calcule l'holonomie stochastique pour le groupe d'Heisenberg, question difficile.

Le problème de la réalisation de la série discrète m'a ainsi conduit au calcul des variations. Il s'agit de résoudre une intégrale multiplicative,

---

[12] de la forme {z : j(z)<0} où j est sous-harmonique régulière.

dans un contexte où on ne dispose pas de formule de Stokes seulement une formule infinitésimale, obtenue en linéarisant la variation. Pour l'holonomie stochastique, vous partez d'un vecteur, vous le tournez, vous obtenez une tache au retour dont vous prenez l'espérance, c'est du calcul de variations stochastiques.

J'étais familier avec le théorème de régularité de Hörmander qui est important en théorie de plusieurs variables complexes et un résultat de Debiard et Gaveau m'a influencé. Ils ont montré en 1975 que les fonctions finement harmoniques étaient différentiables en utilisant un brownien complexe et ils ont appliqué cela aux fonctions monogènes de Borel auxquelles je m'étais intéressé quand j'avais 20 ans. Donc ceci m'incita à utiliser les variations stochastiques en vue du théorème de Hörmander en me plaçant sur l'espace de Wiener...

— et en utilisant le processus ou le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck...

oui, c'est vraiment le processus qui m'intéressait. A cette époque, j'étais radicalement probabiliste. Maintenant j'ai un peu changé. Mais je venais de rentrer dans le sujet, les néophytes sont souvent les plus fanatiques, je ne voulais entendre parler que de processus. De mon passage en analyse harmonique j'avais retenu que ce qui faisait marcher la théorie des espaces de Sobolev c'était l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation. Je me disais : on n'a plus un système invariant par des translations dépendant d'un nombre fini de paramètres, on a un système dynamique stochastique qui laisse stable la mesure et c'est ça l'analogue de l'invariance de la mesure de Lebesgue en analyse harmonique classique.

Il y a d'autres approches du calcul des variations. L'ennui du processus d'Ornstein-Uhlenbeck c'est que c'est lourd, mais à mon avis c'est l'une des méthodes les plus puissantes, elle est plus générale que les méthodes fondées sur les inégalités de Meyer ou la méthode de Bismut fondée sur le théorème de Girsanov.

— Vous considérez qu'elle a la même généralité que celle des formes de Dirichlet qui ne suppose pas les hypothèses gaussiennes ?

Oui, c'est la même méthode. Cela dit, aujourd'hui, mon avis est qu'il faut aller au delà des formes de Dirichlet. La difficulté avec les formes de

Dirichlet est qu'il faut avoir une mesure. Il faut avoir le gradient et la mesure. Si on n'a pas la mesure on ne peut utiliser de formes de Dirichlet. Alors mon projet actuel c'est d'avoir une manière de construire la mesure à mains nues. Je fabrique un opérateur elliptique sur mon espace de dimension infinie et puis je prends la solution élémentaire de l'équation de la chaleur, je prends le mouvement brownien associé et je regarde à l'instant t ça donne une mesure dont il faut ensuite montrer des propriétés c'est délicat mais on y arrive. On peut construire la mesure plutôt que de se la donner a priori.

— Dans pas mal de questions il y a une mesure naturelle...

Aujourd'hui, voyez-vous, après m'être écarté du point de vue probabiliste, j'en suis venu à un point de vue — qui durera quelques mois, ou quelques années, je ne sais pas — où les mesures doivent être construites comme des lois de diffusions données par un opérateur elliptique. Dans la forme de Dirichlet vous avez le gradient. Mais ici je prends un point de vue où il n'y a même pas de gradient, pas de mesure, simplement un opérateur elliptique.

— Il va en sortir de toute façon une mesure.

Bien entendu, mais si vous voulez avec les formes de Dirichlet il y a un élément infinitésimal, le gradient, et un élément global, la mesure. Tandis qu'actuellement je dis "*infinitésimal toute*". Et le problème de base n'est pas de parler de la régularité des lois puisqu'on ne peut en parler mais de construire des mesures.

— Qu'est-ce qui a intéressé spécialement l'école japonaise ?

Ce qui a intéressé les Japonais c'est un papier que j'ai fait au JFA en 1974 dans lequel je résous le semi-groupe de la chaleur sur les formes harmoniques en remontant sur le fibré des repères grâce à quoi j'obtiens un théorème d'annulation. J'avais connu Bochner à Princeton quand il venait de faire de grands théorèmes d'annulation. Le papier au JFA a intéressé Ito qui m'a invité à un symposium, il n'avait pas de fonds mais les Japonais ont fait la quête, je l'ai su par la suite, on a pris à chaque Japonais peut-être un mois de son traitement pour faire marcher le symposium ! Ensuite, je suis retourné au Japon, en 1962 où j'ai construit l'analyse quasi-sûre, les capacités, les minces, etc. C'est vous qui avez remis sur le tapis avec vos papiers et votre livre avec Hirsch le point de vue processus symétriques avec les formes de Dirichlet, qui vous donnent d'ailleurs les résultats de régularité sous les conditions les plus faibles à ce jour.

— Sous les hypothèses lipschitziennes du théorème d'Ito. Mais vous, maintenant, vous êtes beaucoup plus orienté vers les conséquences sur la pensée géométrique...

Il m'est arrivé une chose assez heureuse, j'ai eu un cours de géométrie à faire à Orsay en 1964 et j'en ai fait un livre. L'enseignement est très enrichissant pour le travail de recherche, à condition tout de même d'avoir de bons étudiants. Ce fut une chose très positive pour moi. Cela m'avait confirmé l'importance de la géométrie en analyse, également les travaux sur les opérateurs pseudo-différentiels où il y a beaucoup de géométrie.

— Sur l'espace de Wiener qui a priori n'a qu'une structure mesurable vous dégagez des concepts qui ont un sens géométrique.

Il y a une structure différentielle sur l'espace de Wiener c'est l'espace de Cameron-Martin, et il y a les applications de Ito qui envoient l'espace de Wiener plat sur un espace de probabilité sur une variété riemannienne[13]. Le problème est de savoir si l'application de Ito est différentiable. Elle ne l'est pas si on reste dans l'espace de Cameron-Martin. Ce qu'on vient de faire avec Ana-Bela Cruzeiro montre qu'elle est différentiable si on admet une classe étendue de processus tangents qui sont un processus de Cameron-Martin plus une martingale, mais la martingale doit avoir son coefficient antisymétrique. De tels processus conservent la classe de la mesure de Wiener et sont conservés par l'application de Ito.

— Donc ce serait les bonnes variations admissibles ?

Nous espérons, il y a de bonnes propriétés, le crochet de Lie se comporte bien...

— Aux jeunes chercheurs que conseilleriez-vous ?

---

[13] étant donné une équation différentielle stochastique (EDS), l'application de Ito est celle qui associe à une trajectoire brownienne la trajectoire de la diffusion solution de l'EDS.

S'attaquer à des problèmes bien circonscrits, mais tout de même faisables. Lire sans s'attaquer à des problèmes est un exercice qui mène rarement quelque part.

Et puis il faut changer de domaine, en faisant tache d'huile, non pas sauter de façon brusque, il faut voir ce qui est près de son domaine. Je crois que ce qu'on apprend dans une branche, on le met dans sa gibecière et après on essaye — non pas de le transposer de force ailleurs ce serait ridicule — mais de ne pas l'oublier.

Il y a une chose que je n'ai pas beaucoup faite et donc je suis gêné pour la conseiller mais je pense qu'il faut regarder les possibilités des mathématiques dans d'autres sciences. Les mathématiques c'est une méthode et les autres sciences sont une provocation pour le mathématicien. Par exemple, Norbert Wiener a bien réussi ça.

— Parmi les mathématiciens du passé y en a-t-il pour lesquels vous avez une admiration particulière ?

Beaucoup. D'abord Poincaré. C'est une histoire curieuse, Mittag Leffler lui a demandé un an avant sa mort de faire une notice scientifique sur ses propres travaux. Mittag Leffler l'a fait relier, et le livre a été donné par Carleson aux archives de l'Académie. Le voici, en lisant cela on voit un itinéraire passionnant. Il transpose ses connaissances d'un endroit à un autre.

Notez qu'il n'a pas su reconnaître Bachelier[14]. Il a dit à propos de sa thèse qu'il y avait des idées mais que ce n'était pas rigoureux.

— Écoutez, c'est le moins qu'on puisse dire !

Voyons, combien de thèses de maths sont rigoureusement justes et rigoureusement inintéressantes !

Mais dire que Poincaré est une de mes lectures favorites, non, les styles changent. Pour un exposé à l'Académie j'ai relu récemment Poisson. J'ai choisi deux pages d'un mémoire de cents pages de 1822. De l'équation fonctionnelle des fonctions théta qu'il vient de découvrir, Poisson dit que cette formule est "assez intéressante" ! Elle a été utilisé

[14] Louis Bachelier est considéré aujourd'hui comme le découvreur du mouvement brownien mathématique et des processus à accroissements indépendants, ainsi que le pionnier des mathématiques financières contemporaines. Ses idées sur les processus ont été rendues mathématiquement correctes par Wiener et Kolmogorov qui l'a cité.

par Hardy et Littlewood pour la méthode du cercle pour calculer les coefficients d'une forme modulaire ! Quant à la formule sommatoire, appelée maintenant formule sommatoire de Poisson, sept ans avant la parution du livre de Fourier, Poisson fait de l'intégrale de Fourier. Il n'y a pas de démonstrations mais tout est rigoureux. C'est un homme qui a beaucoup de retenue, pas de coup de trompette. Élu en 1831 à l'Académie il devait avoir 31 ans. Dans le même journal de l'Ecole Polytechnique il y a aussi un mémoire de Cauchy. Ce journal paraissait de temps en temps sans périodicité fixe, quand on avait quelque chose à dire !

Les auteurs du passé ont été digérés. Je ne vais pas aussi loin qu'André Weil[15]. Mais les anciens comptent beaucoup pour moi. La France est une terre mathématique et elle doit le rester.

— C'est au fond aussi le message de Dieudonné dans son livre "Pour l'honneur de l'esprit humain".

Très beau livre. Meilleur que le style de Bourbaki. Voyez-vous je ne pense pas que dans 150 ans des gens photocopieront des pages du traité de Bourbaki pour s'extasier. Dans ce mémoire de Poisson au contraire, il y a des lignes rayonnantes de vie...

---

[15] Dans ses *Mémoires d'apprentissage* André Weil écrit à propos de ses lectures à l'Ecole Normale " Depuis longtemps, et tout d'abord en lisant les poètes grecs, je m'étais persuadé que, dans l'histoire de l'humanité, seuls comptent les très grands esprits et que seul compte, pour faire connaissance avec eux, le contact direct avec leur œuvre; j'ai appris depuis lors à nuancer beaucoup ce jugement, sans tout à fait m'en défaire".

Paul André Meyer

L'hommage rendu par plusieurs témoignages de probabilistes à Jacques Neveu et Paul André Meyer publié dans la Gazette des Mathématiciens *d'Avril 1996, me dispense d'une longue présentation. Les deux hommes ont été les maîtres d'œuvre de l'école probabiliste française avec des styles complémentaires, Neveu clarté simplifiante, Meyer idées inachevées à poursuivre ...*

Si vous suivez Meyer, non seulement l'aboutissement mais aussi le trajet est intéressant, comme avec certains guides de haute montagne talentueux, vous apercevez une foule de choses à côté desquelles vous seriez passé sans rien voir, des curiosités locales, des perspectives des coups d'œil, des chemins de traverse qu'il faudra investiguer plus tard. Avec Damien Lamberton nous avons fait la randonnée de son interprétation probabiliste de la théorie de Littlewood-Paley, belle balade, nous y avons appris en passant un grand nombre d'idées centrales utiles pour d'autres questions. L'œuvre de Paul André Meyer est considérable et se démultiplie dans les travaux de ses élèves. La phrase de David Williams résume parfaitement la situation : "Probability theory has been profoundly and permanently changed by him."

N.B. *Le thème qui m'intéresse de façon centrale dans ces dialogues est l'importance d'un travail sur le sens en mathématiques. On peut aborder la question à partir du rôle que jouent les mathématiques pour la physique.*

P.A.M. Quelque chose me frappe beaucoup : prenons la théorie de la relativité, elle ne peut se manipuler que par le langage mathématique; la façon dont l'espace et le temps se mélangent est une chose qui échappe complètement à notre pensée usuelle et pourtant grâce au langage mathématique on arrive à la manipuler exactement. On sait bien que les gens qui manient les concepts du monde physique, en particulier de la mécanique quantique qui résiste encore bien plus fortement à notre compréhension intuitive que l'espace-temps en relativité, parviennent à les manipuler grâce au langage mathématique. Ils se fabriquent alors une espèce d'intuition qui n'est probablement pas une intuition des objets eux-mêmes mais une idée de la façon dont ils se manipulent. On arrive à court-circuiter le raisonnement logique, à aller plus vite que lui, mais en restant toujours dans le domaine d'objets dont on ne peut se faire une image.

— Cela ressemble assez à ce que les informaticiens appellent la sémantique fonctionnelle.

Absolument, l'articulation des objets les uns par rapport aux autres fait naître du sens.

— Cette importance de l'intuition pour la communication ne nécessite-t-elle un changement de style en mathématique, étant donnée surtout la profusion de la production ?

Il n'est pas clair pour moi qu'augmentation de la production et nécessité d'un changement de style soient liées l'une à l'autre. L'augmentation de la production peut être simplement une conséquence de l'augmentation du nombre de mathématiciens, qui est elle-même conséquence de l'augmentation du nombre de postes à l'université. Ce nombre n'a pas de raisons de continuer indéfiniment à augmenter. A des gens qui sont dans la même position et dont le nombre s'est certainement multiplié par cent par rapport à ce qu'il était avant la guerre, on demande de produire. Leur rôle social est de produire alors ils produisent. Maintenant qui lit leurs articles ? Là c'est de l'ordre de la sociologie des intellectuels. Les revues mathématiques vendent aux bibliothèques, donc ce qu'il faut ce n'est pas que la production soit intéressante, mais qu'il y ait suffisamment de membres d'un groupe pour qu'on demande au bibliothécaire d'acheter la revue. Ce phénomène sera limité non par la qualité mathématique mais par la loi de l'offre et de la demande. Le *journal of mathematical chiromancy* cessera de paraître quand il n'aura plus de souscripteurs quelque soit la qualité des articles !

Le vrai problème est qu'on n'arrive plus à lire les articles intéressants. Ce n'est pas un problème de qualité : tu n'arrives plus à lire les articles que tu voudrais lire. Il y a maintenant dans le monde, sur ton sujet mettons 40 ou 50 mathématiciens dont il faudrait lire les œuvres alors qu'avant pour un sujet comme ça, on aurait été de l'ordre d'une dizaine. Donc c'est un phénomène sociologique et non psychologique ou philosophique. A une époque qui n'est pas si lointaine le travail mathématique était fait essentiellement par les professeurs des lycées, dont la justification se trouvait en dehors de la recherche. Rien d'autre ne les poussait à écrire que l'intérêt. Jacques Deny et Paul Malliavin par exemple ont été professeurs dans le secondaire. A cette époque entre les deux guerres il y avait peu de professeurs d'université en mathématiques en France.

— Et la production était très différente. Je suis impressionné par le nombre de revues nouvelles qui se sont crées dans les domaines liés aux applications.

N'oublions pas que ce sont des mathématiciens qui ont eu l'idée des ordinateurs. Turing était un mathématicien, Von Neumann était un mathématicien. D'autre part sans le travail des géomètres différentiels il ne peut y avoir de relativité générale, sans l'invention des espaces de Hilbert, etc. Ce ne sont pas des mathématiques appliquées, c'est cette vertu étonnante des mathématiques que ce langage et cette pensée — car ils ne peuvent être séparés l'un de l'autre — ont une condensation et une efficacité prodigieuses parce qu'ils ne sont ni conceptuels ni automatiques. Tout ce que nous voyons autour de nous est de plus en plus un produit des mathématiques, non pas des mathématiciens, mais des mathématiques.

— Des divers mathématiciens contemporains dont j'ai étudié les travaux, et nous sommes nombreux à penser cela, tu es celui dont l'écriture mathématique transmet le plus de motivations, et même celui qui a osé le premier, à une époque complètement bourbakiste, et aussi par la suite, être présent comme homme dans son texte. Faisais-tu cela de façon délibérée et consciente ou bien en te disant que dans une rédaction définitive tu ôterais ces choses, ces fioritures ? Penses-tu qu'on peut aller plus loin dans cette voie, est-ce compatible avec de bonnes et hautes mathématiques ?

Oui, c'est volontaire, mais si tu regardes où j'ai écrit, ça fait trente ans que je suis mon propre éditeur ! Le séminaire de Strasbourg, qui est le séminaire de Paris depuis longtemps, est un moyen de publication qui ne peut se généraliser, sinon on aura de grands embouteillages. Ce sont de gros volumes qui n'ont pas la même exigence de qualité que les revues. L'idée du séminaire était de stimuler l'activité des étudiants de Strasbourg en publiant leurs articles d'exposition et les thèses de 3ème cycle qui ne sont pas considérées comme des mathématiques nobles, sur le même plan que ce qu'il est convenu d'appeler la recherche des gens qui travaillent à l'université. C'est une facilité qu'on s'est donnée, qui a marché, qui d'une certaine façon ne marche plus maintenant. L'idée était de faire des mathématiques tranquillement en dehors d'un certain nombre de pressions, hors des contraintes de place, de referees, de correction d'épreuves ...

— de gérer soi-même l'intérêt ?

Oui, on a laissé passer beaucoup d'articles qu'un journal aurait refusés parce qu'on sentait que ça stimulait des gens qui étaient à Strasbourg d'être publiés là. Il y avait suffisamment de choses bonnes pour faire avaler le reste.

— Mais ma question vaut aussi bien pour ton ouvrage avec Claude Dellacherie.[16]

Il faut non seulement que les choses soient vraies, il faut aussi qu'elles aient du succès. L'ouvrage avec Dellacherie a eu du succès au début, puis il a cessé d'en avoir car nous ne l'avons pas écrit assez vite.

— Il y a dans ce traité un style particulier, aux antipodes par exemple de celui du traité d'analyse de Jean Dieudonné.

C'est vrai, il y a quelque que nous essayons de dire qui n'est pas dit d'habitude dans les textes mathématiques ordinaires. Il faut dire que souvent les gens écrivent mal. Quand on écrit, il faut expliquer à quoi ça sert, ce qu'on peut faire avec ce matériel, où on va, les buts. Peut-être est-ce un luxe par rapport au prix de la page dans un journal.

Il y a autre : je suis arrivé aux probabilités à une époque où la théorie n'était pas formalisée, c'était une époque cruciale, ça faisait trente ans que cette formalisation aurait pu être faite mais il n'existait que très peu de livres, aucun enseignement.

---

[16] P.A. Meyer et Cl. Dellacherie, *Probabilités et Potentiel,* cinq volumes, Hermann, 1975 à 1992

— tu veux dire sur les processus ?

Même sur les probabilités, j'ai eu du mal à apprendre la théorie de la mesure sous forme probabiliste. Ce n'était pas courant. Neveu a écrit un livre *Bases mathématiques du calcul des probabilités*[17] qui a été le seul de son genre en français pendant dix ans, sur les processus en temps continu il n'existait presque rien. Il y avait le livre de Doob[18] qui a créé un mouvement formidable, avec un style très condensé. Chez Feller on refusait la théorie générale au profit des exemples. Pour cette raison son livre sur les probabilités discrètes[19] est un livre fantastique, et le livre en temps continu[20] est moins bon que le premier volume où il tente de voir comment on peut faire des choses profondes avec les mathématiques du secondaire.

— Une question que j'ai posée aussi à Laurent Schwartz et Gustave Choquet, peux-tu mieux qualifier ton plaisir en mathématiques ?

Je pense que le plaisir des mathématiques c'est le plaisir de comprendre quelque chose. J'ai souvent peiné sur un article où je voulais comprendre un résultat et tout d'un coup, voilà, on se dit c'est tout simple. C'est le plaisir de comprendre.

— Trouver la vraie raison ?

Démonter quelque chose, on a vu comment ça marche, on est capable de démonter le truc et de le remonter, comme on démonte un réveil. Ce n'est pas un plaisir spécifiquement mathématique, lorsque tu lis un roman et que tu trouves une phrase qui met deux choses en correspondance, il y a une étincelle qui jaillit.

J'ai horreur de sécher. Je pense que Schwartz par exemple est un vrai mathématicien, j'en ai connu un certain nombre à des degrés divers d'intelligence générale. Schwartz est évidemment un homme très intelligent, tous les mathématiciens ne le sont pas. Mais c'est un vrai mathématicien, il est fait pour les mathématiques. Moi je n'ai pas le sentiment d'être un mathématicien.

---

[17] Masson 1964
[18] J.L. Doob, *Stochastic processes,* Wiley 1953
[19] W. Feller, *Introduction to probability theory and its applications,* Wiley, vol 1 1950
[20] ibid vol 2 1966

— *Les mathématiques n'induisent pas forcément une certaine forme d'esprit.*

En tout cas une certaine forme de comportement intellectuel, qu'on peut qualifier de hardi si l'on veut être élogieux, d'outrecuidant sinon. Par exemple lorsque Grothendieck a été nommé au collège de France, il a dit qu'il acceptait le poste à condition d'enseigner moitié en mathématiques, moitié en écologie. Il était qualifié en mathématiques, pas en écologie. Le point de vue des mathématiciens c'est "puisque j'ai été capable de faire la quadrature de la cycloïde, je peux faire n'importe quoi". C'est une attitude assez répandue et naïvement expliquée dans les mémoires de Paul Lévy[21]. Ce n'est pas raisonnable, la comparaison avec l'architecture s'impose. En architecture, tu as des problèmes de résistance des matériaux, quand tu considères une voûte il faut qu'elle tienne, et il ne suffit pas de faire un beau projet sans s'occuper de savoir si ça va tomber ou non. Les mathématiciens n'ont pas ce problème. Le matériau est purement intellectuel. Une fois l'esquisse faite, on n'a à s'occuper de rien d'autre. D'ailleurs il y a même le problème de la résistance des collègues, souvent les mathématiciens n'en tiennent pas compte !

— *Revenons à ton style d'écriture, on a l'impression quand on te lit que tu es très proche.*

J'ai un plaisir à rédiger, ce n'est pas un plaisir à faire des mathématiques, par certains côtés c'est un plaisir d'ordre littéraire. Les vrais mathématiciens détestent souvent rédiger, par exemple je pense à Mokobodzki. Il aime trouver des théorèmes, il aime sécher, quand il a trouvé, ça ne l'intéresse plus, il passe au théorème suivant, je considère que Mokobodzki est un vrai mathématicien.

— *Là, je crois que tu utilise le terme de vrai mathématicien de façon très subjective.*

J'ai plaisir à expliquer, ce n'est pas un plaisir mathématique.

— *Les mathématiques sont aussi ça je crois.*

Ce n'est pas fondamentalement mathématique, il y a des chimistes qui ont plaisir à expliquer. Pauling par exemple est quelqu'un qui expliquait bien. Un pédagogue.

---

[21] P. Lévy, *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien,* A. Blanchard, 1970.

— Ça va au delà, tu es un de ceux qui ont plaisir à transmettre que les choses que tu fais sont intéressantes, or ça, il me semble que c'est le style des mathématiques de demain.

Je pense que ça fait partie de nos activités, ça fait partie du plaisir que j'ai eu dans ce métier, mais c'est peut-être quelque chose qui m'a empêché de faire de meilleures mathématiques, j'ai passé trop de temps à rédiger. C'est aussi un peu un alibi. Le travail mathématique pur est double : c'est d'une part de démontrer des théorèmes, de comprendre, de résoudre des problèmes, d'autre part de lire. J'ai fait de bonnes mathématiques tant que où j'ai beaucoup lu.

Ce qu'on oublie souvent c'est que les mathématiques sont une science donc un travail collectif. Les mathématiciens voient le travail individuel. Untel a démontré le théorème donc le travail est fait; or il y a un travail de digestion, si le théorème le mérite — les théorèmes célèbres ne le méritent pas toujours. Certains sont un aboutissement, une impasse.

— Choquet fait remarquer qu'il y a des résultats faciles qui sont extrêmement éclairants.

Les résultats les plus importants en mathématiques sont des résultats faciles. On prend conscience du fait qu'une chose qui n'a l'air de rien du tout, est la clef, l'idée autour de laquelle toute sorte d'autres choses s'organisent.

— On est en plein dans le travail du sens : quelque chose de simple qui peut être éclairant.

Non seulement quelque chose de simple peut être éclairant, mais les chose éclairantes deviennent simples. Il y a un travail collectif qui simplifie. Prenons une idée qui a été une montagne pour la compréhension : la notion d'espérance conditionnelle, qui est extrêmement difficile à comprendre. A un moment donné ça devient complètement trivial, on n'y pense même plus. Bourbaki a fait ce travail là par exemple pour la topologie. La topologie générale au moment où il l'a prise était un monstre, enfin peut-être que j'exagère, peut-être est-ce une impression que Bourbaki arrive à donner, mais dans ce foisonnement d'idées il a dégagé quelque chose qui est — là encore une comparaison architecturale s'impose — Saint Pierre et sa colonnade.

Par la suite ils ont gâché leur architecture, ils ont été incapables de hiérarchiser. Bourbaki est prisonnier d'une architecture linéaire. Ce qui est naturel, c'est une architecture en arbre comme on peut faire maintenant avec un ordinateur. Bourbaki aurait dû être relié avec des anneaux et une numérotation décimale comme une encyclopédie médicale.

— Je reproche à Bourbaki d'avoir effacé tout ce qui est du domaine de l'intérêt, que néanmoins on lit partout entre les lignes, hypocrisie ... Les choix d'intérêt sont très marqués.

Il y a même des phénomènes notoires d'exclusion, c'est la preuve que c'est une œuvre humaine. Bourbaki a exclu de l'algèbre tous les ensembles ordonnés et a accordé une place ridicule à la logique et aux probabilités.

— Toujours à propos du sens en mathématiques penses-tu que la physique apporte quelque chose aux mathématiques ou que les mathématiques que la physique suscite n'ont d'intérêt que pour la physique ? Je pense notamment à tes travaux sur les probabilités quantiques, le bébé Fock [22]*par exemple ...*

S'il n'y avait pas la physique personne n'aurait fait des probabilités non commutatives. Les motivations des probabilités quantiques sont quantiques, elles viennent d'a priori philosophiques suivant lesquels ces choses ont une importance dans la nature, du moins pour moi c'est comme ça.

Si je devais donner des conseils à un étudiant, après sa thèse je lui dirais de suivre les cours de physique pour comprendre les motivations des physiciens. A mon âge je n'apprendrai plus cela, je fais dans ce domaine ce qui m'intéresse et ce sont des idées purement probabilistes. L'intérêt est assez difficile à prévoir, les chaos de Wiener, par exemples, ont été découverts par Wiener dans les années 30, il en a donné la définition et personne ne s'y est intéressé. En 39 il a trouvé les chaos de Poisson. Ce sont les probabilités quantiques qui ont relancé l'intérêt pour

[22] jeu de mots introduit par Jean-Luc Journé pour désigner un analogue probabiliste discret à l'espace de Fock utilisé par les physiciens.

les chaos de Wiener[23], là le concept d'intérêt est important, on revient à une notion et on enrichit l'image qu'on a du sujet. Quantité de problèmes sont ouverts, martingales ayant la représentation prévisible et n'ayant pas de représentation chaotique. Toute une partie du métier consiste à faire apprécier par les gens ces objets nouveaux, le contraire de ne pas être compris, de travailler dans son coin, de se dire "on viendra me chercher si on a besoin de moi".

— Parmi tes travaux inachevés, y en a-t-il que tu accepterais de confier en langage intuitif pour ce livre ?

Tout ce que j'ai en train, je le fais, c'est le seul moyen pour moi d'en garder une trace. Mais il y a des tas de choses que j'aimerais comprendre[24]. Par exemple sur les espaces de Dirichlet j'ai une question qui m'est restée en travers de la gorge et que je n'ai jamais complètement menée à bien. C'est l'idée que lorsqu'on a une mesure qui ne charge pas les polaires et la fonctionnelle additive qui lui est associée, qu'est-ce que la trajectoire voit de la mesure, et même chose pour les distributions d'énergie finie il leur correspond des fonctionnelles additives qui sont des fonctionnelles additives de Fukushima[25] et bien j'ai toujours envie de regarder en suivant la trajectoire ce qu'on voit d'un potentiel en double couche. Voir ça concrètement comme un temps local...

Et puis par exemple je suis toujours fasciné par le problème de savoir si on peut fabriquer le temps local d'une surface en recollant les temps locaux des éléments de surface. Un hyperplan possède son temps local, un petit bout d'hyperplan a donc aussi un temps local qui a une densité par rapport au précédent. La question est de savoir si le temps local d'une surface est l'intégrale sur la surface d'une forme différentielle qui dit comment la trajectoire traverse chaque élément de surface. Ce

---

[23] Les chaos de Wiener constituent une décomposition de l'espace des variables aléatoires de carré intégrable définies sur le mouvement brownien. en une suite de sous-espaces orthogonaux chacun constitué des variables aléatoires qui peuvent s'écrire sous forme d'intégrale multiple.

[24] la suite de l'entretien est un peu technique et difficile à comprendre au non spécialiste, au demeurant, il me paraît être un document assez intéressant sur la façon de s'exprimer et de transmettre ses motivations en mathématiques.

[25] Voir l'entretien avec Fukushima et notamment son récit de la découverte de la décomposition des fonctionnelles additives en martingales et processus d'énergie nulle.

sont là des images intuitives qui sont peut-être fausses. Ce ne sont pas des travaux inachevés ce sont des travaux jamais commencés.

David Nualart

A cause de la guerre civile et parce que le franquisme ne s'y intéressait pas particulièrement l'Espagne est restée absente de la scène internationale en mathématiques dans la période qui suivit la seconde guerre mondiale. Dans ces conditions faire ses études à Barcelone n'était pas une motivation vers la recherche. David Nualart est un premier de cordée. Il a ascensionné le massif du calcul stochastique jusqu'à ses plus hauts sommets, il est maintenant parmi les chercheurs les plus cités. Nous nous sommes rencontrés alors que je tentais avec Francis Hirsch d'attaquer le calcul de Malliavin avec l'équipement des formes de Dirichlet. Avec Zakai, Ustunel, Pardoux, Ocone, Nualart, et d'autres trop nombreux pour être cités, nous formions, d'une certaine façon, la seconde expédition vers ces contrées encore mal connues. La vue y était splendide, on voyait à la fois du côté de l'analyse et du côté des probabilités. Les passages qui donnaient accès à cette chaîne avaient été dégagés par les pionniers, Krée, Malliavin, Stroock, Bismut, Meyer, Watanabe, qui avaient fait part de leur enthousiasme lors de la rencontre de Durham[26] *en 1980, mais une certaine brume subsistait ici et là et beaucoup restait à découvrir. Nous échangions les impressions durant les rencontres de Silivri qu'Ustunel avait eu l'obstination d'organiser en Turquie, son pays natal, à la fois pour le vivifier par de bonnes mathématiques et pour nous faire profiter de la sérénité du site merveilleux d'une bourgade musulmane dominant d'une petite falaise la mer de Marmara.*

Maintenant ce domaine de recherche est assez bien investigué, surtout après la publication de son livre[27] *qui fait référence et Nualart est parti avec Pardoux et Zakai vers le calcul anticipatif....*

---

[26] *Stochastic integrals,* Lectures notes in Math. 851,Springer 1981
[27] D. Nualart *The Malliavin calculus and related topics*, Springer 1995

N.B.— *Je crois que tu es venu à la recherche mathématique assez tardivement après avoir enseigné à l'Ecole des Beaux Arts de Barcelone ?*

D.N. J'ai fini mes études de mathématiques à l'Université de Barcelone en 1972. A l'époque il n'y avait pas de groupes de recherche actifs à l'Université, sauf quelques exceptions. En général, la recherche en Espagne, surtout en mathématiques, n'était pas développée. Donc, quand je suis sorti de la faculté je n'avais pas du tout l'idée de faire de la recherche, et la seule pensée que je pourrais travailler en essayant de résoudre des problèmes mathématiques me semblait bizarre et utopique. J'étais persuadé qu'il serait très difficile de montrer des résultats nouveaux, et je ne voulais pas vivre sous pression pour obtenir des théorèmes intéressants.

D'autre part j'étais un étudiant avec de très bonnes notes. Un professeur de probabilités, Eduard Bonet, avec qui j'avais une bonne amitié m'a convaincu de demander une bourse, que j'ai obtenue sans problème, pour préparer une thèse dans le département de statistique. Il faut dire qu'au moment de faire cette demande je ne pensais pas m'engager sérieusement vers la recherche, et que la première année je donnais aussi des cours, trois après-midis par semaine, dans une école professionnelle de la banlieue de Barcelone.

Comme il n'y avait pratiquement pas des cours de troisième cycle, j'ai du étudier moi-même, d'une façon assez peu efficace, des sujets de la théorie des probabilités, et plus tard, certains travaux sur l'intégrale stochastique. C'est comme ça que j'ai pu soutenir très vite (en 1975) une thèse qui n'avait aucun intérêt. Pendant ces premières années et jusqu'au début des années 80 j'ai perdu beaucoup de temps sans savoir exactement ce que je devais faire. Je ne savais pas quels articles je devais lire et quels sujets de recherche il fallait développer. Je dois dire que j'ai toujours aimé apprendre des choses nouvelles, donc, même sans avoir une motivation ou une direction précise, je m'amusais avec ce que je faisais. Petit à petit j'ai commencé à comprendre la complexité et les finesses du calcul stochastique. Puis, il y eut l'influence positive des cours de Saint Flour[28] et le séjour d'Evarist Giné à Barcelone pendant deux ans.

Le département de statistique de l'Université de Barcelone avait des rapports avec le département de mathématiques de l'Ecole d'Architecture (ETSAB). Certains professeurs faisaient l'enseignement dans les deux centres. En plus à l'ETSAB on avait besoin d'enseignants de mathématiques. C'est ainsi que j'ai enseigné à l'Ecole des Beaux-Arts pendant quelques années: de 1973 à 1978 où j'ai obtenu un poste de professeur "adjunto" équivalent à maître de conférences au département de statistiques.

Mon premier travail de recherche sérieux a été fait en 1980. J'étais intéressé par le calcul stochastique pour les processus à deux indices, qui était un sujet un peu à la mode à ce moment-là. En juin 1980 on a organisé un congrès international à Paris sur les processus à deux indices, et les actes en ont été publiés dans le volume 863 des *Lecture notes in mathematics* de Springer. C'est alors que Xavier Guyon et Bernard Prum qui étaient en train de finir leur thèse d'état sur le calcul stochastique dans le plan m'ont invité pour trois mois à Orsay pour discuter sur ce sujet. Pendant mon séjour j'ai réussi à montrer qu'il y a des martingales à deux indices dans la filtration brownienne qui ont une variation quadratique indépendante du chemin, mais qui ne peuvent pas se représenter comme des intégrales stochastiques. J'étais content parce que la construction de ces martingales avait été très compliquée, et il s'agissait d'un contre-exemple à une conjecture formulée par Cairoli et Walsh dans leur article fondamental sur le sujet. C'était la première fois que j'avais une grande satisfaction par mon travail.

— Peux-tu raconter un peu au détail une investigation qui t'a vraiment plu, par exemple ton avancée dans le domaine de la dimension infinie ?

L'un des sujets de recherche sur lequel j'ai travaillé le plus est le calcul de variations stochastiques et ses applications. C'est à dire le

---

[28] Les Ecoles d'été de Saint Flour sont une institution particulière de la communauté probabiliste française qui durant un mois chaque année encourage l'accès à la recherche de jeunes mathématiciens par des cours d'introduction à des travaux de haut niveau et en leur permettant d'exposer eux-mêmes leurs investigations.

calcul différentiel au sens faible sur l'espace des trajectoires browniennes, qui est de dimension infinie. Avec Moshe Zakai et Etienne Pardoux on a développé le calcul stochastique anticipatif ce qui a permis de formuler et résoudre des équations différentielles stochastiques anticipantes. D'autre part on a fait des applications du calcul de variations stochastiques aux équations aux dérivées partielles perturbées par un bruit blanc. J'étais content d'arriver à montrer certains des résultats obtenus dans ces directions.

Mais tout de même, j'aime mieux l'obtention de résultats concrets qui ont besoin d'arguments astucieux. Dans ce sens l'investigation qui m'a produit le plus de plaisir est, sans doute, la démonstration de l'existence d'un point d'arrêt optimal dans le plan, en supposant l'hypothèse classique de l'indépendance conditionnelle sur la famille des tribus. En 1989, et grâce à une invitation de Renzo Cairoli, j'ai passé trois mois à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Pendant les premiers jours on a discuté un peu avec Cairoli sur différents aspects de la théorie des processus à deux paramètres. Il m'a dit qu'il n'y avait pas encore de solution satisfaisante pour le problème de l'existence d'un point d'arrêt optimal dans le plan en temps continu. Comme j'avais des conditions excellentes pour travailler, j'ai pensé regarder ce problème dès le début, et c'est comme ça que j'ai trouvé une idée pour faire avancer la recherche. Il s'agit du fait que le maximum de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est égal, presque sûrement, à la somme des maxima. En utilisant ce fait, on construit d'une façon presque magique le point d'arrêt randomisé[29] associé à la mesure aléatoire. Cette construction était tellement complexe que après avoir complété tous les détails j'avais encore des doutes sur la validité du résultat, et j'étais étonné que ça marche. C'est vrai qu'il s'agit d'un résultat dans une théorie qui intéresse très peu de monde, mais pour moi ça a été la recherche la plus satisfaisante.

— *Est-ce à dire que tu attaches de l'importance aux résultats nouveaux ? Quelle est ta doctrine lorsque tu es referee ? Faut-il*

[29] néologisme signifiant « rendu aléatoire ».

privilégier les idées simplificatrices ou les résultats nouveaux mêmes s'ils sont compliqués ?

A mon avis l'obtention d'un résultat nouveau a plus de valeur, en général, que la découverte d'idées nouvelles qui permettent de généraliser ou simplifier la démonstration de résultats déjà connus. Quelque fois, la première démonstration d'un résultat nouveau utilise des techniques compliquées. Cela peut -être dû au fait qu'on est plus intéressé par l'achèvement de la preuve que par une éventuelle simplification ou réduction de la méthode employée. Ensuite, si le résultat est vraiment important, il y a toujours des gens qui simplifient la démonstration ou qui trouvent d'autres méthodes de démonstration plus simples ou plus directes, et qui permettent aussi de généraliser le résultat. Pour moi c'est le fait d'être capable de faire une première démonstration qui a le plus d'importance.

Il faut dire aussi que cette formulation est trop générale et il faut préciser ce qui se passe dans chaque situation concrète. Il y a eu des idées nouvelles très importantes qui ont permis de rendre certaines théories et certains résultats accessibles au grand public, et qui ont une grand valeur.

En tant que referee, pour qu'une démonstration d'un résultat connu soit acceptable dans un bon journal il faut vraiment qu'elle contienne des idées intéressantes. D'autre part, un résultat nouveau important, même s'il a une démonstration techniquement compliquée, on doit l'accepter si l'auteur a vraiment fait un effort pour bien rédiger la preuve, et si on ne voit pas, d'une façon directe, une autre méthode pour faire la démonstration.

— *Il semble donc que l'obtention d'un résultat nouveau ait à tes yeux le plus de valeur. Je ne suis pas sûr d'être de ton avis. Pour te provoquer je dirais trouver des résultats nouveaux n'est-ce pas de la cueillette ? Alors que trouver des compréhensions nouvelles n'est-ce pas là de l'agriculture qui fait qu'après les fruits sont plus nombreux ?*

La recherche en mathématiques doit avoir un objectif précis. En général cet objectif est l'obtention d'un résultat nouveau, ou bien le développement d'une méthode nouvelle pour traiter des problèmes connus. En tout cas, il faut d'abord comprendre profondément le problème sous différents points de vue. D'autre part, en général, on ne sait pas exactement ce qu'on trouvera dans la recherche et on peut aboutir aussi à des applications différentes de l'objectif initial. On ne peut séparer les deux choses : la recherche d'un résultat nouveau ou d'une théorie nouvelle et le fait d'avoir une meilleure compréhension d'un problème ou d'une approche. Pour répondre à ta phrase, je crois que dans la recherche en mathématiques il faut trouver des compréhensions nouvelles fécondes : ce qui compte ne sera pas seulement d'avoir avancé dans la compréhension du problème mais aussi l'originalité des résultats trouvés ou de la théorie développée.

— *Peux-tu commenter davantage un résultat que tu considère comme important ?*

Je choisirais volontiers les inégalités de Paul André Meyer sur les équivalences de normes dans le cadre du calcul de Malliavin. Pour obtenir ces inégalités sur l'espace du mouvement brownien, il suffit de considérer le problème en dimension finie et de voir que les constantes qu'on obtient ne dépendent pas de la dimension.

Les inégalités de Meyer donnent l'équivalence entre les normes de l'opérateur gradient et de la racine carrée du générateur infinitésimal du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck. Elles s'écrivent

$$(1) \qquad c_p \| Cf \|_{L^p} \leq \| \nabla f \|_{L^p} \leq C_p \| Cf \|_{L^p}$$

où $1 < p < \infty$, f est une fonction régulière sur l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^n$ et ∇ est l'opérateur gradient. L'opérateur $C = (-L)^{1/2}$ est la racine carrée de $-L$, où L est l'opérateur du second ordre donné par

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Il faut remarquer que dans l'espace de Hilbert $L^2(R^n,g)$ où g est la loi normale réduite, les polynômes de Hermite sont des fonctions propres des opérateurs L et C, et l'opérateur C est un opérateur de multiplication par $k^{\frac{1}{2}}$ où k est l'ordre du polynôme. En ce sens C est un opérateur simple tandis que ∇ est un opérateur vectoriel plus compliqué à manipuler. Les inégalités de Meyer ont l'intérêt de comparer les normes d'opérateurs de nature différente. L'équivalence (1) a été établie par Meyer en utilisant les inégalités de Littlewood-Paley. La démonstration de Meyer est plutôt compliquée et comporte des calculs un peu longs. Après, Gundy en a donné une preuve utilisant l'inégalité de Burkholder pour les martingales. La démonstration de Gundy repose sur le calcul stochastique par rapport au processus de Bessel d'ordre trois. Dans ce sens, Gundy utilise des arguments purement probabilistes. Il y a aussi une démonstration des inégalités (1) faite par Pisier qui réduit ces inégalités à la bornitude de la transformée de Hilbert. D'autre part, il faut remarquer que les inégalités (1) ont un rapport avec la bornitude dans l'espace L^p de la transformée de Riesz. Cette remarque est présente dans les idées de Gundy et de Pisier. Je crois que les travaux de Gundy et Pisier ont apporté des points de vues nouveaux sur l'équivalence de normes (1) qui ont permis de mieux comprendre ces inégalités. Il faut dire que l'équivalence (1) est spécialement intéressante en dimension infinie, en particulier, si l'on prend comme espace de probabilité l'espace des fonctions continues sur [0,1] muni de la mesure de Wiener (loi de probabilité du mouvement brownien) au lieu de l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^n$. Dans ce contexte, les inégalités de Meyer ont des conséquences intéressantes pour le calcul de Malliavin, qui est un calcul différentiel au sens faible dans l'espace des fonctions continues. Par exemple, à partir des inégalités (1) on déduit des estimations de la norme L^p $p>1$ de l'opérateur de divergence δ (adjoint de l'opérateur gradient). On peut montrer alors que l'opérateur δ est continu dans l'espace D^∞ des fonctions faiblement indéfiniment différentiables. D'autre part, les inégalités de Meyer ont aussi des applications pour le calcul anticipatif, comme la continuité de l'intégrale stochastique de Skorohod qui est une généralisation de l'intégrale d'Ito aux processus non adaptés. Dans les premiers travaux sur le calcul de Malliavin (le cours de Stroock à Saint Flour, par exemple), on devait utiliser l'opérateur gradient ∇ et l'opérateur L pour construire l'espace D^∞ des variables régulières. Les inégalités de Meyer ont simplifié notablement la présentation du calcul de Malliavin et la démonstration des critères fondamentaux de régularité de lois de probabilités. En conclusion, j'aime bien le résultat de Meyer pour sa beauté et, bien sûr, pour ses conséquences, mais je crois aussi que du point de vue de sa démonstration, les travaux de Gundy et Pisier donnent des arguments simples et jolis et apportent des points de vue nouveaux qui permettent de mieux comprendre ces inégalités.

Nicole El Karoui

A la fin des années 80, débat houleux dans le grand amphi de l'Institut Henri Poincaré. On se serait cru vingt ans plus tôt, à l'époque des AG et des motions.

Nicole El Karoui et d'autres mathématiciens qui s'étaient engagés vers ces applications nouvelles, avaient organisé un débat sur la question "Mathématiques et finance". Il y avait un malaise.

Il faut comprendre qu'en mathématiques par la forte exigence intellectuelle et l'absence de concession a régné longtemps une méfiance vis-à-vis des compromissions avec le pouvoir, l'armée ou même l'industrie. Les applications industrielles il est vrai avaient été progressivement réhabilitées — comme en témoigne l'essor de la SMAI[30]*— grâce au dynamisme de l'école d'analyse numérique. Mais oser se lancer dans les mathématiques financières, c'est-à-dire aider les hauts lieux du profit, avait-on le droit ? Peut-être avions-nous l'idée inconsciente que les mathématiques allaient purifier ce monde, l'élever vers les lois rigoureuses de l'esprit. Finalement, nous croyions au fond de nous-mêmes que les mathématiques elles-mêmes allaient se trouver fécondées par des significations nouvelles et que pour les capter elles n'avaient qu'à effleurer ces pratiques de pouvoir, sans s'aliéner et perdre leur âme...*

C'est un peu ce qui s'est passé. Mais il fallut que certains probabilistes aillent voir sur place dans les salles des marchés ce qui se passait vraiment. Nicole El Karoui fut de ceux-là. Elle y apporta une large culture en contrôle stochastique en théorie markovienne du potentiel et en théorie générale des processus. En retour elle en tira de quoi vivifier des recherches internationales et le DEA de probabilités de Paris 6.

---

30 Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles

N.B. *Considères-tu comme plusieurs collègues que les sciences en général et les mathématiques en particulier voient leur légitimité remise en cause ?*

N.E. Ce sentiment, pour tout ce qui fait référence à une structure d'abstraction perçue pour elle-même, statut qu'on a fini par donner aux mathématiques, est fortement ressenti à tous les niveaux des cycles d'enseignement. A l'université, en premier cycle, on est même déjà remis en cause pour le vocabulaire qu'on emploie. Il y a eu un tel rejet dans la formation dans les lycées d'une présentation formalisée, on a l'impression d'être en terre étrangère. Cette abstraction est vue comme un luxe que plus personne ne s'autorise. Il faut faire utile, concret, immédiatement utilisable.

Ce sont les jeunes qui nous renvoient cette vision des choses. Transmettre une motivation progressive pour une discipline incontestable dans ses fondements, notre travail, être passionné pour les enjeux, le montrer devient de plus en plus mal compris.

— *Étant une femme, ne te sentais-tu pas plus proche et mieux comprise des étudiants ?*

A l'École Normale Supérieure de Fontenay aux Roses, où j'ai enseigné 8 ans j'ai compris mon rôle comme étant d'établir un rapport de communication et de transmettre une certaine image des mathématiques. Au début, l'Ecole Normale n'accueillait que des filles puis elle est rapidement devenue mixte, avec en mathématiques une majorité de garçons. Ce changement de point de vue a modifié la forme des échanges, mais ni leur intensité ni leur importance. A l'Université aussi j'ai l'impression qu'en effet les étudiants viennent me voir en confiance personnelle, pour des conseils.

La découverte des mathématiques, je l'ai faite moi-même en math-sup, où m'ont été présentées des mathématiques structurées et j'ai eu le sentiment que c'était ce que j'attendais ces dernières années. Je me rappelle encore l'étonnement émerveillé que j'ai ressenti quand on nous a introduit la théorie des ensembles. D'une part, je me demandais comment on avait pu nous "cacher cela" dans un enseignement de mathématiques, mais surtout j'étais impressionnée par le fait qu'on disposait d'un cadre pour poser les questions qu'on avait envie de poser et donc un cadre pour y répondre. Ce refus maintenant d'admettre qu'une pensée ça se structure, qu'il y a des mots pour le dire, qu'il y a des analogies qui sont porteuses, cela bride les gens, les empêchent de questionner face à son environnement.

Pendant ces années de classes préparatoires, j'ai découvert en mathématiques qu'on me donnait les moyens de quelque chose, d'un progrès conceptuel. Finalement, les maths sont à cet égard un accès plus facile que la philosophie dans laquelle la mise en place des idées est plus seconde par rapport au réel. Cette expérience a eu lieu au lycée de garçons de Nancy, le seul à l'époque à avoir des classes préparatoires. Nous étions trois filles assez brillantes (les premières depuis longtemps), mais considérées avec une certaine condescendance par les garçons. Ceci renvoyait à une interrogation (un peu atténuée par de bons résultats) assez récurrente de ma part sur la question de savoir si j'étais bien à ma place...

Je suis exactement sortie de Sèvres en 68 et j'ai été nommée à Orsay où Jacques Deny, responsable des mathématiques m'a accueillie en me faisant toute confiance.

J'avais une motivation très forte pour les probabilités, spécialité dans laquelle j'avais fait mon DEA pendant ma dernière année d'École. En octobre 68, il y avait beaucoup de groupes de travail à l'Institut Henri Poincaré. Sur les conseils de Didier Dacunha-Castelle j'ai participé à celui de Marie Duflo qui portait sur les processus à temps continu et le traité de Blumenthal et Getoor[31] qui venait de sortir. J'y ai aussi rejoint Bernard Roynetle et Hervé Reinhard qui le suivaient depuis un an déjà. Les fonctionnelles additives et multiplicatives, largement utilisées dans ce traité, fonctionnelle étaient des notions toutes récentes avec lesquelles je me suis familiarisée ainsi rapidement et qui ouvraient vers un cadre purement probabiliste. Pendant trois ans, à temps plein, à trois, nous

[31] R.M. Blumenthal et R.K. Getoor, *Markov processus and potential theory*, Academic press 1968, ce livre avec celui de P.A. Meyer, *Processus de Markov*, lect. notes 26, Springer, 1966, constituaient pratiquement les deux seuls ouvrages disponibles sur les processus de Markov à cette époque.

avons fait de la recherche dans ce domaine. Cette expérience m'a marquée définitivement et grâce à elle je me suis engagée vers la recherche. J'ai eu ma première fille durant cette période, et j'ai pu mesurer la volonté qu'il fallait avoir pour reprendre le travail après une interruption de trois mois, mais surtout une interruption psychologique. Roynette et Reinhard avaient continué et étaient en pleine théorie des martingales à mon retour.

Nous avons appliqué les martingales aux processus de Markov par le biais des "problèmes de martingales"[32] en juin 71 et on a soutenu une thèse d'Etat collective à trois avec un travail individuel réalisé par chacun pour que la thèse soit acceptée, le mien concernait des problèmes de réflexion avec un opérateur au bord. Il faut dire qu'il y avait une tradition au laboratoire de probabilités de thèses collectives, (Dacunha-Castelle et Bretagnole, puis Azema, Duflo, Revuz).

Cela n'a été en aucune façon une gêne administrativement d'autant qu'en 71 il était facile d'obtenir un poste de professeur. Simplement je me suis rendue compte que lorsqu'on signait une lettre tous les trois, la réponse était le plus souvent adressée aux deux garçons seulement ! Au début du moins...

— Il y avait peu de femmes.

En probabilités, il y avait Édith Mourier et Marie Duflo, et à Strasbourg Catherine Doléans. Tout de même dans des domaines comme les probabilités qui étaient peu considérés à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, on trouvait beaucoup de sévriennes. En quelque sorte, les filles utilisaient les créneaux que les garçons ne prenaient pas, et on y trouvait des X pour la même raison. Les polytechniciens n'avaient pas la même formation de base en maths et choisissaient des voies moins académiques. Les probabilités s'y prêtaient bien, on y était très progressivement mené vers l'abstraction. Après la thèse, j'ai participé à ce qui fut une grande aventure, la "théorie générale des processus". Sous l'impulsion principale de P.A. Meyer, ce courant de recherche dégagea dans un cadre commun des outils pour l'étude des processus de Markov,

---

[32] Trouver les probabilités sous lesquelles une famille de processus faisant intervenir un certain opérateur devient une famille de martingales est une façon d'aborder la théorie des processus de Markov introduite par Stroock et Varadhan en 1969.

des martingales et de la théorie de l'intégration stochastique, notamment les célèbres théorèmes de section et de projection. De nouveau la magie du cadre abstrait unificateur et simplificateur opérait... et mon émerveillement restait intact. La théorie des processus de Markov retravaillée avec la théorie des martingales, c'était les probabilités des processus à temps continu qui sortaient des limbes et prenaient leur autonomie. En effet dès qu'on faisait quelques opérations naturelles sur les processus de Markov, on perdait les hypothèses de régularité courantes (hypothèses de Feller), importantes pour pouvoir se référer à la théorie du potentiel.

— *Les processus de Markov ont finalement trouvé leur expression la plus aboutie dans le cadre des processus droits.*

Oui mais ça les a tués définitivement. C'était d'une trop grande technicité, et cela a bloqué le système. Il a fallu plusieurs années à Sharpe pour écrire cela proprement et quand son ouvrage est arrivé, plus personne n'enseignait cette théorie[33].

En probabilités le caractère des publications a évolué. Malgré le grand prestige aux États-Unis de l'école française de probabilités qui nous permettait notamment de publier en français dans les revues, progressivement dans les années 80 on est allé vers des travaux de probabilités plus effectifs et explicites en traitant les exemples jusqu'au bout.

— *Est-ce que les interprétations probabilistes de la théorie du potentiel, t'ont intéressée pour la compréhension qu'elles fournissent ou en elles-mêmes ?*

Je fais partie des mathématiciens qui ont besoin de voir clair jusqu'au bout. Par exemple en contrôle, Jean-Michel Bismut avait ouvert un grand nombre des voies nouvelles puis avait quitté ce domaine pour en explorer d'autres avec la même richesse de vues. De façon moins spectaculaire, j'ai contribué à aller jusqu'au bout de certaines de ces théories, notamment dans le domaine du contrôle partiellement observable.

---

[33] il s'agit du livre de M.J. Sharpe *General theory of Markov processes* Academic Press 1988

On voyait les théories se faire puis être oubliées, ce qui a été une expérience surprenante pour moi, de découvrir que la science n'était pas un phénomène d'accroissement cumulatif. Beaucoup de choses étaient abandonnées, pas toujours les moins importantes.

Il y a une dynamique de la capacité de transmission.

Dans l'exemple que tu citais les processus droits, les processus de Markov ont créé la nécessité pour les probabilistes d'extraire ce qui était déductible de la théorie des martingales ce qui a permis de revenir à une idée plus vaste des processus de Markov que sont ces processus droits. C'était quelque chose de très joli, mais à un point inexploitable et difficilement transmissible, et du coup plus personne ne travaille dans ce domaine.

Même comme chercheur nous voyons que la structure du langage mathématique qu'on croit universel se révèle historiquement datée et très typique.

Je me suis rendue compte aussi vers cette époque que les chercheurs appliqués qui faisaient du contrôle stochastique, connaissaient peu le laboratoire de probabilité de Paris VI, ce milieu en France et à l'étranger était plus lié à l'école des équations aux dérivées partielles.

— Parce que leurs travaux prolongeaient les méthodes hilbertiennes pour les processus stationnaires ou bien portaient sur les diffusions...

...pour lesquelles on n'a pas besoin de tout l'attirail de la théorie générale. La différence entre un analyste et un probabiliste résidait dans le fait de savoir manier les sauts, car alors il faut des techniques différentes et les opérateurs ne sont plus aux dérivées partielles mais intégraux.

— Revenons aux femmes, cette nouvelle période était-elle encore plus difficile pour elles ?

Ça allait mieux en proba qu'ailleurs. Il y avait des filles brillantes, Dominique Michel, Mireille Maurel, etc., et beaucoup de jeunes, et depuis le temps où j'avais commencé en maths et les années 80 il y avait eu une évolution formidable des mentalités.

Quand même, le monde des mathématiques est très masculin. Souvent j'ai eu le sentiment de ne pas connaître les références des autres, leur logique de fonctionnement. J'ai travaillé aussi bien avec des hommes que des femmes et je ne crois pas qu'il y ait deux façons de faire des mathématiques. Un certain nombre de règles implicites de la communauté mathématique m'échappent bien que j'aie participé activement à de nombreuses instances de décision de la communauté (SMF, CNU en autres). Un système de valeurs non-dit est très déterminé par l'École Normale.

Je trouve que la communauté se perçoit comme très asexuée. Ceci dit les filles rencontrent plus de difficulté en mathématiques, non pas sur le plan intellectuel, mais pour l'articulation des mathématiques avec le reste du monde. Et cette articulation peut être si questionnante qu'un grand nombre de jeunes filles lâchent pied. Il y a des moments cruciaux dans la vie des femmes où elles doivent être dans une dynamique positive vis-à-vis des mathématiques sinon elles les quittent.

Je pense que les filles quittent plus facilement les mathématiques que les garçons. Elles ont comme une force de rappel vers la réalité de la vie quotidienne bien plus forte qui pose et repose la question "est-ce bien raisonnable de passer autant de temps à faire des maths ?"

— Pour en venir à la finance et faire la transition avec l'École Normale, n'as-tu pas été surprise de ce colloque l'an passé organisé par l'École Normale avec tout le gratin du monde bancaire à l'Hôtel Lutetia sur les risques des marchés dérivés, alors que la rue d'Ulm était le haut lieu de la pensée de gauche intransigeante ?

Il y aurait beaucoup à dire. On acceptait à l'École Normale les maths appliquées à la physique, c'était là un jumelage historiquement noble. Mais la finance c'était introduire le diable, dans un milieu traditionnellement de gauche, mélange de maoïstes et de communistes du parti.

Il y a eu l'ouverture du MATIF en 86 qui a créé une impulsion. L'activité sur les produits dérivés, options, contrats à terme, s'est considérablement développée avec une concurrence de plus en plus vive. Issus de l'expérience américaine, des modèles stochastiques étaient couramment utilisés dans les salles de marché. Du coup les banques demandaient des gens capables de lire des articles avec du calcul stochastique. Pas mal de probabilistes s'y sont intéressés, comme mathématiciens, sans s'autoriser à investir la pratique. Dès 90 la plupart des chercheurs ne s'y intéressaient plus autant.

— *Il y avait à comprendre la façon de penser des praticiens, leur lecture, leurs enjeux, et pour cela il fallait coopérer avec les banques.*

Il était facile de faire des maths dont la motivation était les maths financières. Mais je souhaitais une démarche plus professionnelle et par des opportunités que j'ai eues à la C.A.R.[34], j'ai découvert les mathématiques appliquées : modélisation en vue de cerner un phénomène.

— *Modélisation et préparation à la décision.*

Heureusement on n'avait pas besoin d'une culture économique immense pour comprendre. Là j'ai mesuré, qu'une conception souple de l'usage des mathématiques était nécessaire, comprendre que la logique du marché est très forte, qu'on ne pouvait pas l'évacuer, elle primait sur les diverses théories.

— *C'était extraordinaire de trouver une application nouvelle des probabilités qui précisément soit un raisonnement trajectoire par trajectoire, juste après le développement — comme par un fait exprès — du calcul stochastique.*

C'était extraordinaire en effet. Ceux qui abordaient l'affaire avec des connaissances plus proches du marché avaient du mal à saisir. En même temps, le marché faisait un "usage" assez original des modèles, questionnant les probabilistes sur "la place d'un modèle" et les statisticiens sur les objets à soumettre à l'expérience statistique.

— *Les praticiens n'avaient pas l'habitude de travailler avec des inventeurs ou des chercheurs ce qui créait des relations très différentes de celles que rencontraient les mathématiciens appliqués dans l'industrie.*

D'abord la difficulté habituelle à exprimer clairement ce qu'ils font, puis — ce que j'ai mis un certain temps à découvrir — une réserve qui fait qu'ils ne veulent pas dire exactement leur démarche pour qu'on ne soit pas capable de reconstruire leur activité. L'autre difficulté est l'absence d'expérimentation, répétable, pour tester des modèles de prix

[34] filiale de la Caisse des Dépots

d'option ou des stratégies de couverture de risques. Par contre les délais d'implémentation peuvent être très courts et les prototypes issus d'un modèle testés très rapidement.

La finance m'a montré explicitement comment l'abstraction et la généralité pouvait être utile concrètement, pour éclaircir une situation en gardant la contrainte fondamentale qui est ici la référence au marché, puis de mieux discuter sur les spécifications du modèle à adopter en vue de son implémentation.

Ceci dit, les grandes heures des idées générales en finance sont maintenant un peu passées sur les options, sur les taux, sur les marchés internationaux. Ce qui est fondé sur le principe d'arbitrage est maintenant bien compris. Restent bien des questions numériques, algorithmiques, la simulation Monte Carlo. Si on essaye de prendre en compte les imperfections du marché on quitte le domaine où il y a un consensus général de modélisation. Comment prendre en compte dans les prix des options les périodes de perturbation importante des marchés. Sur les taux cela s'est produit trois fois en trois ans. D'où une réflexion sur les événements rares...

Je pense que les questions importantes vont devenir la gestion des grandes institutions financières, les fonds de placement, qui ont progressivement un accès de plus en plus ouvert au marché.

— C'est perturbant pour nous qu'un des lieux de pouvoir les plus forts de cette fin de 20ème siècle passe par les mathématiques. Durant la guerre froide et auparavant ce rôle était tenu par la physique.

Des mathématiques abstraites qui ne sont plus "pures". Difficile de gérer ces contradictions, mais l'aventure intellectuelle est tout à fait stimulante. Notamment la confrontation avec la contingence du modèle. Le modèle n'est pas tout, les contradictions sont nombreuses puisqu'on utilise un modèle fixe sur trois mois qu'on gère au jour le jour en tenant compte d'une réalité qui ne suit pas ce modèle. La pratique du marché semble plus performante que les modèles qu'on propose.

Les prémonitions de Bachelier en finance sont impressionnantes, que le marché doit être équitable, etc. Et quand le saut qualitatif et épistémologique des années 70 a eu lieu, il est intéressant de voir comment le marché s'est saisi de cela, il a fallu ajuster les prix précisément, d'où l'information issue du modèle.

— *Tant qu'il y a la présence d'un jeu de hasard pur, cela renvoie à des mathématiques solides*.

On joue quand même une trajectoire contre la moyenne, les praticiens ont une mentalité de joueurs.

Richard Gundy

Un enthousiasme permanent et communicatif. En tenue de sport, il ouvre son séminaire à Rutgers University comme une partie de tennis ...

Richard Gundy est imprégné de culture française et s'exprime dans notre langue avec une grande aisance et un parlé savoureux. " Dick " est un américain francophile quoique non inconditionnel...

Il aime les résultats forts et préfère l'expression concise que les développements inutiles. Pionnier de la théorie des martingales, son nom est associé aux inégalités difficiles[35] *qui font la force de la théorie. Il est probabiliste orienté vers l'analyse fonctionnelle et la théorie des semi-groupes d'opérateurs.*

N.B. De 1958 a 1988 le nombre de papiers recensés dans les math-reviews est passé de 8000 à 100000. La tendance est exponentielle. Une majorité d'articles ne sont pas cités, peut-être pas lus. Crois-tu que cette situation va contraindre les mathématiciens à changer leur manière de s'exprimer ?

R.G. Certes, nous sommes dans une crise, un surcroît de maths. Est-ce que ca va forcer les mathématiciens. à changer leur façon d'écrire, à devenir plus clair ? Je constate que ce n'est pas le cas, au moins pour le moment. Il y a dans certains sujets (physique mathématique, entre autres) une dérobade. La quantité d'articles augmente, et la lucidité décroît. Il semble que le système de referee-revue va de mal en pis, justement à cause de la nécessité, pour tout le monde, de publier.

[35] Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy, voir par exemple Cl. Dellacherie et P.A. Meyer *Probabilités et Potentiel, Théorie des Martingales* §VII.92 Hermann (1980)

Je vois mal comment la communauté mathématique pourra s'organiser pour effectuer un changement. Nous vivons dans un monde où plusieurs revues se créent chaque année, grâce à la loi de l'offre et la demande, et en même temps les bibliothèques n'ont plus les moyens de tout prendre. Bien que les mathématiciens déjà reconnus aient la liberté de brider leurs envies de publier, ce luxe n'est pas accessible aux jeunes gens qui cherchent "à s'établir".

— Peux-tu raconter le trajet qui t'a amené à la recherche mathématique ? Une vocation enfantine ? Des professeurs remarquables ? Des rencontres déterminantes ?

J'ai commencé ma carrière en mathématiques assez tard. Pendant les quatre ans des "undergraduate studies", la période entre l'école secondaire et la formation "post-graduate" où on se spécialise dans tel ou tel sujet, je n'ai assisté à aucun cours de maths. Mes intérêts allaient ailleurs; j'ai suivi des cours de philosophie, psychologie, etc. Vers la fin de mon parcours, j'ai décidé de continuer en psychologie, à Indiana University, Bloomington, Indiana. Pendant les deux premières semaines à Bloomington, je me suis rendu compte qu'il me faudrait une connaissance des éléments d'analyse pour comprendre les probabilités et la théorie de la détection de signaux, deux sujets qui se sont avérés utiles dans les théories d'apprentissage et de psycho-acoustique. Les profs les plus influents à cet égard étaient J. P. Egan, W.K. Estes, et C.J. Burke, en psychologie; et en maths, à Indiana, j'ai beaucoup appris de J. Blum, et G. Kallianpur.

Lorsque j'ai eu fini ma thèse de Ph.D (avec Egan), j'étais déjà plus épris par la mathématique que par la psychologie. C'était l'époque de Sputnik, une période très favorable pour ceux qui cherchaient une subvention dans les sciences "dures". J'en ai trouvé une, grâce à la Fondation Rockefeller, au département de Statistiques de l'Université de Chicago. Après six semaines là-bas, ils m'ont suggéré que j'y reste afin de faire un deuxième Ph.D en statistiques. Bien que ce sujet m'ait beaucoup intéressé à Indiana, une fois aspirant officiel au département, j'ai recommencé à changer de cap. En effet, j'ai boudé complètement les cours de statistiques en faveur du cours d'analyse harmonique, donné par

Eli Stein[36]. Son cours m'a beaucoup apporté, et ce fut un tournant dans ma carrière. Malgré mon dilettantisme, on m'a décerné un deuxième Ph.D. en statistiques, pour une thèse sur quelques sujets divers: séries de Haar, martingales, et un problème posé par Renyi. S'il y a une chose que je regrette, c'est qu'un trajet pareil ne soit plus possible aux jeunes d'aujourd'hui, étant donnée la pénurie actuelle.

— Ce trajet détourné par la psychologie nous ramène de notre sujet principal. Penses-tu que nous percevons les objets mathématiques , est-ce qu'ils existent ?

Les philosophes dépensent beaucoup d'énergie sur une preuve de l'existence intrinsèque des objets mathématiques. Je ne suis pas capable d'y ajouter la moindre chose. Quand je travaille, et je tombe sur quelque chose, il me semble que j'ai dévoilé une petite vérité, cachée dans la nature. Mais celle-ci est une constatation sur moi-même. Est-ce qu'il y a une réalité au delà de ça? Je t'en dirai des nouvelles dans la prochaine vie!

— Dans le cas de la théorie des martingales qui s'est développée assez progressivement depuis les premières idées de Kolmogorov et de Paul Lévy (à l'inverse de celle des espaces de Hilbert par exemple qui est arrivée presque d'un seul coup) quels ont été à ton avis les faits importants qui expliquent ce développement ? La combinatoire des inégalités fines ? Le fait que les martingales portaient en elles une grande généralité qui se connectait avec la théorie des semi-groupes ? Le fait qu'elles avaient beaucoup d'applications ? Pourquoi t'es-tu toi-même intéressé à ce sujet ?

Les martingales m'intéressaient au début parce qu'en les étudiant, j'ai vu les trajectoires en gros plan pour la première fois. Quand on regarde une trajectoire isolée, la probabilité perd une grande partie de son mystère. Je crois qu'une des raisons pour lesquelles les débutants ont du mal à comprendre la probabilité, c'est que les probabilistes effacent toujours les "omégas" dans leurs textes. En outre, la comportement de la

---

[36] E. Stein est notamment l'initiateur de l'interprétation probabiliste de la théorie de Littlewood-Paley évoquée dans les entretiens avec P.A. Meyer et D. Nualart, par son livre fondateur *Singulars integrals and differentiability properties of functions,* Princeton Univ. press 1970.

suite des sommes partielles de séries de Fourier m'intéressaient. Je voyais les martingales à temps discret comme un sujet subordonné à la théorie de systèmes orthogonaux. (J'avais tort!)

Comment expliquer la progression du développement de la théorie des martingales (à l'inverse, comme tu dis, de la théorie des espaces de Hilbert)? Selon Doob, un père-fondateur, c'était un problème d'emballage: une fois qu'il mis le nom "martingale" (au lieu de "classe D"), tout le monde a sauté dessus.

Les grandes poussées dans la théorie: la théorie du potentiel et le lien avec le mouvement brownien, du à Kakutani, et ensuite Doob, Hunt, et Meyer. La grande découverte d'Ito, sa formule de changement de variables, et un calcul pour SDE[37].

Pour les martingales à temps discret, c'était la parution du chapitre VII du livre de Doob. Étant donné l'influence de ce chapitre, dans l'optique d'aujourd'hui, il est difficile de comprendre pourquoi le sujet a dormi pendant la période entre 1953 et 1965. Mais, en 1965, Don Austin montre, dans une petite note des Annals of Math. Stat. que la variation quadratique d'une martingale, bornée dans L_1, est finie, presque partout. Don Burkholder a du reconnaître l'importance de cette "remarque", peut-être encore plus qu'Austin.

Et puis voilà...

— Comme tu es venu aux mathématiques par la psychologie je souhaiterais qu'on aborde la question des femmes en mathématiques. Malgré le changement de la condition feminine depuis la 2ème guerre mondiale et notamment la plus grande réussite des filles que les garçons dans les études secondaires, on ne voit pas d'augmentation des femmes dans la recherche mathématique. Crois-tu qu'elles soient moins douées ? Ou que cela ne les amuse pas beaucoup ?

Penses-tu que les mathématiciens se préoccupent trop peu de séduire ? Je veux dire séduire en général et séduire les femmes en particulier ?

Ma constatation personnelle est que les femmes ne s'amusent pas tellement des mathématiques. A première vue, c'est notre culture qui les

---

[37] équations différentielles stochastiques

dirige vers d'autres choses. Quant à savoir si elles sont moins douées à cause de leur structure génétique, là, on a une question presque inaccessible, comme la plupart des questions importantes de notre vie. La plupart des mathématiciens-mathématiciennes que je connais sont très discrets-discrètes sur leur vie intime, beaucoup plus discrets-discrètes que les psychologues que j'ai connus-es. Aussi, moins aventuriers-aventurières. Parmi les psychologues de ma connaissance, il y en a de toutes sortes, et de tous goûts. Mais parmi les matheux-matheuses je ne connais qu'une victime du SIDA. Même le taux de divorce me semble moins élevé parmi "nous" que dans la population générale.

Masatoshi Fukushima

Les mathématiques sont-elles les mêmes au Japon qu'en France ? Oui, mais avec un style souvent différent car ce ne sont pas exactement les mêmes choses que les étudiants connaissent bien et les textes des chercheurs n'insistent donc pas sur les mêmes difficultés.

Au XXème siècle les mathématiques s'y sont développées rapidement et sont devenues très brillantes, remarquablement illustrées par l'école probabiliste. Citons au moins : Kakutani célèbre entre autres choses pour le premier article faisant la connexion entre le mouvement brownien et la théorie du potentiel; Kiyosi Ito inventeur du calcul stochastique, M. Motoo, S. Watanabe, M. Fukushima qui ont notamment développé la théorie des processus de Markov, et I. Shigekawa, T. Hida, H. Sugita qui ont travaillé sur l'espace de Wiener, la dimension infinie et le bruit blanc, et ce sont là naturellement que quelques uns des probabilistes de renommée internationale.

Masatoshi Fukushima est un chercheur profond au style ciselé. Il a beaucoup publié, est très souvent cité[38]*, et a effectué de nombreux séjours aux États-Unis et en Europe, mais il a gardé une grande simplicité devenue presque légendaire...*

N.B. *Certains collègues considèrent que dans le passé les mathématiciens se restreignaient davantage et ne publiaient que des idées nouvelles suffisamment importantes. Que pensez-vous des conséquences du principe 'publish or perish' sur la pratique mathématique ?*

M.F. A première vue l'accroissement exponentiel du nombre de publications mathématiques est surprenant en comparaison de la

[38]notamment son livre *Dirichlet forms and Markov processes,* North Holland/Kodansha 1980 et sa nouvelle version plus approfondie avec Y. Oshima et M. Takeda *Dirichlet forms and symmetric Markov processes* De Gruyter 1994.

progression au plus linéaire du nombre de chercheurs dans le passé récent. Vraisemblablement chaque chercheur essaye d'écrire des papiers plus régulièrement et plus fréquemment qu'avant pour tenir compte d'une politique d'évaluation intensifiée de la part de son institution. Cependant je ne vois pas de façon évidente de déclin substantiel des journaux mathématiques globalement. Une interprétation optimiste serait que les interactions non seulement des divers champs au sein des mathématiques mais aussi entre les mathématiques et les sciences voisines (physique, biologie, informatique, sciences de l'ingénieur, économie, etc.) se sont développées considérablement dans les dernières décennies et entraînent un accroissement des thèmes pour des papiers mathématiques.

Un changement d'attitude dans l'écriture vers plus de motivations et moins de technicités est perceptible dans le domaine des mathématiques appliquées. Mais la plupart des mathématiciens ne tentent plus de voir toute la forêt de l'activité mathématique et se contentent de regarder autour de leurs arbres favoris. Je ne sais pas quel effet peut avoir cette tendance. Ce que je peux dire c'est que les articles de présentation générale couvrant les activités récentes dans divers champs deviennent extrêmement importants et que c'est un des rôles primordiaux des institutions mathématiques que de favoriser de telles publications.

— Pouvez-vous expliquer comment vous est venu le goût des mathématiques ? Fut-ce une vocation d'enfance ? L'influence de certains professeurs ?

Durant mes études secondaires et même avant la licence je n'étais pas du tout orienté vers les mathématiques. Entré en 1955 à la faculté des sciences de l'Université de Kyoto j'eus à choisir une majeure en mathématiques, en physique, ou en chimie etc. Je pris les maths sans forte motivation et en fait je trouvais ardue l'acquisition des compétences nécessaire pour devenir mathématicien, mais j'avais pris cette résolution et j'avais la ferme volonté de devenir mathématicien professionnel quoiqu'il en coûte. Mon oncle était professeur en physique et me conseilla de suivre le cours de probabilités de K. Ito pour ma maîtrise en 1959. On m'a demandé d'étudier un papier de William Feller sur les conditions frontières pour les chaînes de Markov. C'était un sujet assez difficile à prolonger. J'appris l'existence de l'article de Beurling et Deny sur les espaces de Dirichlet[39] par un article de synthèse de Feller et je m'intéressais également aux espaces de Sobolev pour les équations aux dérivées partielles grâce à un livre en japonais de Mizohata. Alors j'étais en mesure d'appliquer les espaces de Dirichlet aux problèmes de frontière pour le mouvement brownien, de nombreuses discussions avec mes amis K. Sato et S. Watanabe me permirent de mettre en œuvre ce programme.

Et en suivant cette voie je devins progressivement passionné de mathématiques.

—Avez-vous tout de suite entrevu que la théorie de Beurling et Deny des formes de Dirichlet allait devenir un outil important ? Quand avez-vous découvert qu'une fonction d'un espace de Dirichlet n'est pas en général une semi-martingale sur les trajectoires ? Votre livre en a-t-il découlé ?

L'article de Feller dont j'ai parlé qui m'a fait connaître les espaces de Dirichlet était de 1960 et insistait sur les méthodes probabilistes. Je cherchais une façon de décrire les conditions frontières pour un processus de Markov minimal multidimensionnel par l'usage d'une frontière idéale (frontière de Martin, frontière de Kuramochi) qui permette d'étendre les travaux définitifs obtenus en dimension 1 par Feller, Dynkin, Ito, Mc Kean. A cette époque les méthodes hilbertiennes étaient presque complètement absentes dans l'étude des processus de Markov qu'on abordait par la théorie des semi-groupes de Hille-Yosida dans l'espace des fonctions continues avec la norme uniforme. Mais ceci n'était pas assez souple pour développer une théorie sur une frontière abstraite excepté en dimension 1 où la frontière se réduit à deux points.

En 1962, J.L. Doob obtint des représentations concernant l'intégrale de Dirichlet des fonctions harmoniques utilisant la frontière idéale de Martin. Ceci renforça ma conviction que les espaces de Dirichlet étaient l'outil adapté pour l'étude d'une condition frontière générale, et de 1968 à 1971 par des travaux de J. Elliott (belle-fille de W. Feller), de M. L. Silverstein et de moi-même débutait l'interprétation probabiliste des espaces de Dirichlet. Mes expériences durant cette période ont fortement

---

[39] A. Beurling, J. Deny, *Espaces de Dirichlet I, le cas élémentaire,* Acta Math. 99 (1958) 203-224. Cet article a initié un courant de recherche sur les formes de Dirichlet et sur les méthodes hilbertiennes.

influencé mes travaux ultérieurs sur les espaces de Dirichlet. J'écrivis en 1975 un livre en japonais sur les formes de Dirichlet et les processus de Markov mais sans le traitement des fonctionnelles additives martingales de Motoo et Watanabe. J'entrepris quelque temps plus tard leur investigation et j'obtins ma décomposition en martingale et fonctionnelle d'énergie zéro qui me valu d'être conférencier invité au congrès international de mathématiques d'Helsinki. K. Ito m'encouragea alors à écrire un livre en anglais incluant ces résultats et mentionnant le plus possible exemples connus à cette date.

— En ce qui concerne les mathématiques pures et les mathématiques appliquées, quels conseils donneriez-vous aux jeunes, ne pensez-vous pas que les mathématiques pures sont une entreprise risquée en ce qui concerne l'audience sociale ? Quel est le climat au Japon sur ces questions ?

Les formes de Dirichlet représentent-elles encore à votre avis un courant de recherche important pour l'avenir ?

L'expression "science mathématique" désigne un champ large incluant maths pures et maths appliquées, mais elles n'avancent pas en parallèle l'une à côté de l'autre. Vous avez des maths pures qui apparaissent au sein des mathématiques appliquées et vice versa. Assez récemment les départements de mathématiques des universités de Tokyo, de Nagoya, de Kyushu ont quitté leurs facultés et ont fondé des instituts indépendants portant le nom de "science mathématique" ce qui inclut les mathématiques appliquées, comme c'était le cas dans mon université à Osaka depuis longtemps déjà. J'y vois le signe que les mathématiciens purs changent leurs attitudes de recherche et sont davantage conscients des champs appliqués.

Ceci dit je suis préoccupé par l'évolutions des choses hors du département de maths pures, en ce qui concerne l'éducation mathématique des étudiants en science et en sciences de l'ingénieur. Par exemple l'intégrale de Lebesgue n'y est plus enseignée du tout et même un traitement rigoureux de l'intégrale de Riemann est le plus souvent omis. Dans ces conditions leur usage de la théorie des probabilités se trouve limitée a priori quelque soit le soin apporté à cet enseignement.

A votre dernière question sur les formes de Dirichlet, je répondrai qu'à mon avis elles survivront dans les situations où les techniques d'équations différentielles stochastiques ne sont pas directement applicables. Analyse en dimension infinie, analyse sur les fractals et notamment diffusions dans les matériaux composites.

Denis Feyel

Elève de M.Brelot, G.Choquet et J.Deny, Denis Feyel est un analyste qui est allé vers les probabilités par la théorie du potentiel et par la théorie ergodique. L'intérêt récent pour la théorie du potentiel en dimension infinie lui a permis avec Arnaud de la Pradelle de montrer la pertinence d'outils d'analyse fonctionnelle forgés à l'occasion de questions plus classiques.

l est directeur du comité de rédaction d'une revue internationale importante et voit par là le jeu concret de l'institution scientifique.

N.B. *Tu m'as fait part déjà de ta position quant à ce que tu appelles le premier et le deuxième niveau dans les apports mathématiques, c'est-à-dire entre les mathématiques qui étendent simplement le corpus des connaisssances et les mathématiques qui sont un re-travail apportant une meilleure compréhension...*

D.F. Je m'élève contre l'idée reçue suivant laquelle on doit publier tout ce qui n'a jamais été publié, tout ce qui est entièrement nouveau. D'abord une chose peut paraître nouvelle par un effet de mode et ne pas l'être vraiment, mais ce n'est pas ce point que je veux discuter, la question qui m'intéresse est de savoir si ça augmente simplement le nombre des connaissances ou bien si ça améliore notre compréhension grâce à une idée lumineuse. J'accepte de préférence une publication qui démontre un théorème déjà connu si la méthode est nouvelle et jette un autre éclairage sur la question. C'est le deuxième niveau, et j'y attache une valeur plus grande. Au contraire, ce que j'appelle les fins de théories, les affaiblissements d'hypothèses sur certains résultats, etc., ça m'intéresse moins. Par contre, si sur un résultat connu, l'auteur, ah! fait enfin comprendre ce qui se passe, ça c'est remarquable. Par exemple pour des résultats difficiles comme la classification des groupes finis ou le théorème de Fermat qui font appel à des résultats intermédiaires lourds s'appuyant sur des théories peu accessibles, si quelqu'un simplifie un lemme en une page, c'est qu'il a eu une idée très importante, et là il fait vraiment avancer le schmilblick!

— N'est ce pas un peu une philosophie bourbakiste ?

Je suis certainement bourbakiste par mon éducation et j'y reste assez attaché sous une forme élargie. Je n'ai jamais critiqué la philosophie de Bourbaki, je dis qu'il a fait son temps, dans les deux sens du terme, et je pense qu'il a fait oeuvre utile. Et pour moi Bourbaki c'est essentiellement du 2ème niveau, sauf les exercices. Il a même parfois exagéré en reléguant des théories entières en exercice.

Mais l'important c'est les idées, pas les résultats. Les résultats, il en faut, parce que l'idée n'est intéressante que si elle en a, mais pour certaines idées on sait qu'elles vont en donner.

Le meilleur exemple de l'importance des idées, c'est le livre de Banach, ces idées ont donné des résultats bien après Banach lui-même. Après Banach on sait enfin ce qu'est un espace normé complet: une idée formidable. De même après Lebesgue on sait ce qu'est une intégrale. Ce sont des idées fondatrices. Avant Lebesgue l'intégrale on voyait ça à la manière d'un physicien, on n'en imaginait même pas les connotations et les ramifications mathématiques. Puis d'un seul coup le soleil perce les nuages (un peu de lyrisme), et tout va très vite... Banach, Lebesgue, mathématiques du 20ème siècle, après il y aura d'autres choses évidemment. Ces idées extraordinaires, souvent d'ailleurs, quand on les lit, sont extrêmement simples. C'est la très grande mathématique.

Aujourd'hui on publie trop de broutilles, qui d'ailleurs sont parfois déjà quelque part, on ne peut pas tout lire. Comme directeur de revue, je répartis la plupart des articles auxquels je comprends peu de choses auprès de spécialistes, mais j'en garde quelques-uns que je tente d'évaluer moi-même. Et souvent je suis dans cette perplexité: c'est correct, c'est exact mais ça n'apporte rien vraiment, ce sont des choses naturelles, c'est normal que ça marche ! A quoi bon publier ça, ce sont des choses comprises avant d'être publiées. Mais on me répond pourquoi ne pas les publier ! Il n'y a qu'une chose à dire: parce que ça ne fait pas avancer la Science. Le laxisme laissant publier n'importe quoi dès que ce n'est pas faux, conduit à un million de publications par an et on est déjà submergé.

— Quelle part accordes tu dans ce jugement à la combinatoire déductive et au sens ?

J'aime bien qu'il y ait idée nouvelle, et normalement elle doit engendrer des résultats nouveaux, ou simplifier des résultats anciens. Le théorème de différentiation de Lebesgue on peut le qualifier — avec tout le respect qu'on doit à Lebesgue — de bricolage. Mais ensuite ce résultat est devenu un sous-produit du théorème ergodique ponctuel ou du théorème de convergence des martingales, dont les démonstrations sont plus simples. Mais ces théorèmes reposent sur d'autres idées. Birkhoff a apporté quelque chose même au théorème de Lebesgue.

C'est le moment de parler des probabilités qui sont un lieu inachevé. La synthèse entre le point de vue probabiliste et analytique n'est pas encore atteinte. On sent parfaitement que les probabilistes ne sont pas familiers avec l'analyse et que les analystes appréhendent mal l'intuition probabiliste. Il y a deux intuitions distinctes. Kolmogorov a énormément apporté en fondant rigoureusement les probabilités sur l'analyse, mais je me demande si l'intuition probabiliste n'y a pas un peu perdu. Une variable aléatoire ce n'est pas une simple fonction, il faudra bien y revenir, une variable aléatoire ça porte bien son nom et ça se comprend parfaitement. Il faudra y revenir sans perdre les avantages de la formalisation de Kolmogorov.

C'est une des raisons qui font que je travaille sur les espaces gaussiens car dans ce cas il y a plus d'intimité entre les probabilités et l'analyse. La mesure gaussienne est un carrefour, qui touche l'analyse fonctionnelle et qui touche les probabilités.

— Tu conseilles souvent aux jeunes de lire les oeuvres des mathématiciens du passé...

Parce que j'observe que le jour où Cantor a commencé à fabriquer la théorie des ensembles — ou plus exactement le jour où Hilbert a très justement dit que c'était bien d'en faire —, le monde mathématique a changé. ça a été extrêmement fécond mais ça a été tellement intéressant qu'on a oublié ce qui se faisait avant. J'ai quelques articles que j'ai réunis de revues anciennes que je relis parfois et qui sont étonnants. Entre autres un article de Tchebichev sur des formules trigonométriques liées au coefficients de la fonction $1/\zeta$ qui est un vrai plaisir, mais que sans doute peu de gens connaissent. Dommage, car c'est très beau et combinatoirement très instructif.

A cet égard je regrette qu'il n'y ait pas dans le secondaire d'enseignement d'histoire des mathématiques. Il me semble que les mathématiques sont une discipline où l'on pratique peu le respect des anciens.

— Tu penses qu'il y a dans le passé une richesse de matériaux qui n'ont pas servi encore pour les mathématiques d'aujourd'hui.

Oui et qui seront probablement remis à profit plus tard. D'ailleurs c'est ce que nous vivons avec l'œuvre de Poincaré. Les anciens prenaient le temps d'écrire. Leurs textes sont pensés en profondeur. Ce n'était pas le ``publish or perish'' d'aujourd'hui.

— Tu as le sentiment que les anciens s'attachaient davantage aux idées et aux compréhensions qu'on ne le fait maintenant.

Je remarque qu'ils éprouvaient le besoin permanent d'une meilleure compréhension. Aujourd'hui on éprouve moins ce besoin, on ne fait souvent que des « exercices », aussi sophistiqués soient-ils.

— Crois-tu que les objets mathématiques existent ?

Non bien sûr, on les invente, ce sont certainement des produits naturels du cerveau humain. Mais on fait comme s'ils existaient. Racine de 2. Bien sûr ça n'existe pas, mais à cause de l'intuition géométrique du carré, à cause de l'algorithme d'Héron, on croit, on sent que ça existe, on vit comme si ça existait. Il a fallu du temps pour que les mathématiciens échappent à l'illusion.

— Assez souvent le mathématicien se trouve dans une situation où les choses s'organisent de façon très complexe et il tente d'y voir clair. On cherche alors l'idée simplificatrice. N'y-a-t-il pas dans cette quête une sorte de drame ?

On cherche la Vérité. On le croit du moins et c'est une aventure tragique. On veut comprendre. On veut comprendre. Mais comprendre quoi ? On veut comprendre ce qu'on est en train de faire. On veut se comprendre soi-même. C'est tout simplement la tragédie humaine.

— Dans ces situations « à élucider » considères-tu l'axiomatisation comme une voie intéressante?

Je pense qu'il y a deux sortes d'axiomatisation. M'intéresse celle qui vient après une crise, celle qui met en ordre ce qui était embrouillé et à quoi on ne comprenait rien. L'axiomatisation inutile est celle qui s'attaque à une situation déjà éclaircie en prenant en compte quelques épiphénomènes supplémentaires qui ne changent pas la compréhension générale des choses. A cet égard en théorie du potentiel l'axiomatisation de Brelot était utile parce qu'elle répondait à une crise, elle montrait qu'avec quelques éléments très simples on pouvait avoir la compréhension de la théorie locale du potentiel, alors que d'autres axiomatisations plus récentes et plus générales me paraissent en fait moins importantes, ce sont des « exercices ». La théorie markovienne de Hunt, que l'on peut aussi considérer comme une axiomatisation est intéressante parce qu'elle répond à de nouvelles questions. Puis quelqu'un est arrivé qui à réuni la façon de voir de Brelot et celle de Hunt. C'est P.-A. Meyer qui a su transporter des intuitions probabilistes vers la théorie du potentiel ou de la théorie du potentiel vers les probabilités dans son grand traité avec Cl. Dellacherie, ce qui était très fécond.

— Cette grille que tu proposes pour la critique de la démarche axiomatique rend à Bourbaki une place d'excellence.

Un signe que la communauté mathématique voit l'utilité du travail de Bourbaki est que les noms qu'il a proposés pour désigner les objets subsistent le plus souvent, sauf en logique évidemment, puisque les logiciens ont travaillé là où Bourbaki était défaillant.

— A cet égard, les mathématiciens contemporains, lorsqu'ils envisagent une idée nouvelle, ne sont pas dans la même situation que les anciens qui — disons jusqu'au 19eme siècle — ne savaient pas, les mathématiques n'étant pas formalisées, si l'idée nouvelle devait avoir droit de cité ou non. Le formalisme aujourd'hui est accueillant de toute idée.

Lorsque les Grecs ont senti la présence de racine de 2, ça a créé chez eux une inquiétude que nous ne connaissons plus.

Ils ont dû avoir un tourment semblable à celui qu'engendra le paradoxe de Russel.

— Par rapport aux mathématiciens du passé nous évoluons dans un cadre symbolique plus élaboré et mieux établi. Nous sommes des saltimbanques avec un filet.

Filet qui a été tendu par Cauchy et par ceux qui ont construit la rigueur.

— Puis par les logiciens qui ont examiné le problème de la contradiction des mathématiques. Ils n'ont pas résolu la question mais l'ont poussée si loin, que dans notre travail quotidien d'analystes nous ne nous la posons plus. Néanmoins, le risque reste présent.

Mais c'est maintenant un risque d'intérêt, non plus de rigueur. Robinson avec l'analyse non standard, prend un risque vis-à-vis de ses pairs, risque d'être rejeté de la communauté. De même que Lebesgue a pris le risque d'être rejeté, il raconte lui-même que certains ne lui adressaient plus la parole (« Nous parlons de fonctions continues, cela ne vous intéresse pas... »). D'ailleurs ses travaux ont acquis leur gloire grâce à l'Ecole russo-polonaise qui leur a donné la notoriété qui convenait. Lebesgue a pris un risque et il a perdu. Pour la postérité il a gagné mais pour son agrément immédiat il a perdu.

— C'est encore plus vrai de Baire.

Oui, Baire avait tracé la voie et Lebesgue était soutenu par Baire. Ceci étant Lebesgue s'est tourné vers la pédagogie, ce qui est noble et souvent très intéressant, mais tout de même différent de la recherche où il n'a pas eu de son vivant dans son pays la reconnaissance qu'il pouvait attendre. Aujourd'hui, compte tenu de la culture vivante du milieu, il n'est pas vraiment difficile d'être un mathématicien honnête. Mais si on a des prétentions plus élevées, ou bien on ne fait rien, ou bien on prend des risques. En fait tous les mathématiciens véritables sont prêts à courir ces risques. Le risque d'être incompris existe mais on le prend. Le vrai malheur c'est de ne plus avoir d'idées.

— Comment es-tu venu aux mathématiques ?

J'ai toujours aimé les maths, d'abord leur côté automatique et leur côté ludique, puis leur côté esthétique, et enfin leur côté visionnaire (elles font toucher l'infini...). C'était une aventure qui demandait si peu de moyens!

J'ai eu d'excellents professeurs à qui je rends hommage en tant qu'hommes de pensée libre et de grande élévation spirituelle, tels que peut en fournir l'Education Nationale. Leurs idéaux étaient ceux de la 3ème république, même après la guerre: élever tout simplement le niveau intellectuel et le sens critique des enfants. Je peux bien sûr en dire autant de mes profs de lettres.

Aujourd'hui, grâce à une bonne orchestration, la préoccupation majeure des étudiants est leur futur métier. J'entends dire « faire des maths pourquoi pas, il faut bien gagner sa vie d'une façon ou d'une autre ». En effet, il y a là quelques possibilités d'emplois, on a besoin d'enseignants à l'université. Pourtant je n'ai pas fait de maths pour gagner ma vie, et on ne fait pas des maths pour ça, ce n'est pas une justification honorable.

— *Tu parles comme un artiste.*

Pourquoi pas ? Il n'était pas question pour moi de renoncer aux maths. J'ai toujours pensé que je savais certaines choses mais juste de quoi me mettre en appétit, et que si j'arrêtais les maths, c'était fini, je n'y aurais plus jamais accès. Je ne saurais pas la suite. J'avais besoin de la suite au prochain numéro ! et, mené par le système universitaire, j'ai tout naturellement fini par en faire mon métier.

— *Si les circonstances économiques, sociales, politiques avaient été différentes et t'avaient contraint pour vivre d'avoir une activité qui prend tout le temps...*

J'aurais tenté d'en faire le dimanche, j'en aurais parlé avec nostalgie, ou bien je serais devenu un de ces amateurs qui envoient des résultats à l'Académie des Sciences, sur les nombres premiers ou autres, ce qui est parfaitement honorable.

— *Comme il y a des amateurs en art.*

Nous sommes des artistes qui ne cherchons à plaire qu'à nos pairs. C'est une exigence sévère car on sait bien que ceux-là, il est plutôt difficile de les épater !

Gabriel Mokobodski

D'un côté, à partir de la fin des années 50 avec les travaux de Hunt, la théorie du potentiel a vu s'élaborer une interprétation probabiliste qui introduisit de nouvelles notions et de nouvelles techniques de démonstration, tirées de la théorie des martingales. D'un autre côté des analystes dont Gabriel Mokobodzki, proposaient des outils et des généralisations qui allaient au-delà des théories axiomatiques (Brelot, Bauer, ...).

Dès lors ces avancées pouvaient être confrontées aux idées probabilistes et par aller-retour on pouvait tenter de voir si une démonstration s'envisageait plus facilement d'un côté ou de l'autre. Mokobodzki prit une part active dans ce dialogue et montra que l'analyse était tantôt une voie rapide d'obtention de résultats d'existence grâce à des concepts abstraits (compacité, axiomes forts de la théorie des ensembles) tantôt le moyen de proposer des algorithmes très concrets et constructifs. C'est un des points qu'il éclaire dans cette discussion ...

N.B. *Tu dis souvent, on fait des mathématiques avec des idées...*

G.M. D'un point de vue naïf, ça veut dire orienter sa réflexion à partir d'images, d'ébauches de théorie, en essayant de dessiner un paysage tant soit peu ordonné avec les éléments dont on dispose. C'est un travail permanent pour rationaliser son intuition, dégager du sens autant que produire des résultats. Il y a deux mouvements dans toutes les sciences, même en mathématiques. Ainsi que l'a mentionné Henri Cartan, il y a un caractère expérimental de la recherche en mathématiques. La méthode expérimentale n'est pas limitée par l'usage d'instruments de mesure ou de calcul et les mathématiques n'ont pas le monopole de la recherche de modèles abstraits.

Cela dit, il ne faut pas mettre au même niveau le travail sur un lemme technique et l'élaboration d'une théorie. Dégager des idées ou dégager des méthodes ne sont pas à confondre, les chercheurs font la distinction.

Le travail d'un chercheur bien intégré dans l'activité sociale des mathématiques participe des deux démarches vers l'abstrait et vers les applications. Si on oppose les extrêmes, d'un côté on a la belle construction architecturale qui est la théorie et de l'autre la recherche de solutions à des problèmes divers, d'exemples et de formes variées, sans a priori, en étant guidé seulement par la curiosité ou par des questions qui viennent d'ailleurs. En général au niveau d'un groupe de chercheurs on fait les deux. Lorsque c'est trop foisonnant on essaye de mettre de l'ordre.

J'ai commencé à faire des mathématiques lorsque Brelot venait de mettre au point sa théorie axiomatique du potentiel. Influencé par le discours bourbakiste, je pouvais croire que la théorie du potentiel atteignait ainsi une sorte d'apothéose. C'était fascinant de voir tout ce qu'on pouvait reconstruire de la théorie du potentiel avec la théorie axiomatique de Brelot. Ce que j'ai compris plus tard c'est que de telles synthèses viennent uniquement en des moments privilégiés et ne sont qu'un aspect de l'activité mathématique. Je crois indispensable de repérer à quel stade on en est, dans le développement historique d'une discipline pour ne pas se fourvoyer dans des excès de formalisme.

— On sait maintenant qu'il y a une charpente de la théorie du potentiel qui est plus vaste que le point de vue de Brelot.

Oui, il y a eu les travaux de Hunt qui ont ouvert l'interprétation probabiliste, les travaux de Beurling et Deny sur les méthodes hilbertiennes, et j'ai été tenté par une super-synthèse, seulement cela appauvrit les structures et on finit par dire les choses de façon trop compliquée. Finalement ce qui est intéressant c'est de dégager de nouveaux angles d'attaque des problèmes. En restant dans le cadre des résolvantes de Ray, modèle qui englobe les différents aspects de la théorie (linéaire) du potentiel, j'ai souvent, par une démarche différente, rencontré Paul-André Meyer qui, avec le point de vue des processus de Markov, posait des questions soit plus simplement soit plus difficilement que moi. Je défends le pluralisme. Il faut pousser les diverses approches et juger sur pièces. La synthèse théorique ne se décrète pas, ce n'est pas toujours le moment propice.

—J'ai remarqué que dans ton travail tu recherchais volontiers des méthodes constructives ou algorithmiques mais qu'en même temps tu ne répugnais pas à utiliser des outils abstraits comme des méthodes de compactification. Considères-tu que les unes ont plus de valeur que les autres ?

Les méthodes de compactification ont souvent un rôle unificateur d'une classe de problèmes et permettent une certaine économie de pensée (voire de publications !). Les méthodes constructives ont pour elles d'accroître les moyens de calcul. Ces deux méthodes sont également des moyens de découverte. Il y a ensuite les questions de goût personnel. Pour un même problème celui de la dérivation des résolvantes, j'ai utilisé les deux méthodes en commençant par celle des compactifications. Comme je voulais être lu aussi des probabilistes, j'ai aussi développé une méthode constructive. Meyer m'a alors fait remarqué que cette méthode avait quelque chose à voir avec le schéma de remplissage en théorie ergodique et m'a incité à aller plus loin dans cette direction.

— Tu as aussi utilisé certains axiomes de la théorie des ensembles pour obtenir des outils opérationnels.

Lorsqu'on aborde une question, on ne sait pas si la difficulté vient de que ce qu'on cherche à démontrer est faux ou bien de ce qu'on s'y prend mal. Donc il ne faut pas se restreindre, au moins au début, pour utiliser des axiomes forts si besoin. Une fois qu'une première démonstration est trouvée ensuite on pourra travailler à faire le ménage des choses inutiles pour en trouver une autre plus élégante.

J'ai travaillé ces questions de dérivation des résolvantes en commençant par utiliser l'hypothèse du continu, ce qui est assez rare en analyse. J'aime cette hypothèse car j'ai cru la démontrer lorsque j'étais étudiant et en toute ignorance de cause puisqu'on sait maintenant que c'est un problème indécidable.

L'hypothèse du continu m'a permis de construire des filtres spéciaux, les filtres rapides qui permettaient de prendre des limites pour toute une famille de mesures simultanément. Je pouvais ainsi montrer qu'il n'y avait pas d'obstruction algébrique au problème de la dérivation.

— Tu as poursuivi ces idées avec les limites médiales.

C'est un outil forgé avec l'hypothèse du continu mais qui est utilisable très simplement par tout un chacun. Il s'agit cette fois de représenter par des fonctions mesurables des limites au sens de la convergence faible. J'appliquais ceci à des questions de convergence de suites de noyaux et prouvais ensuite l'existence de limites au sens ordinaire. Ensuite j'ai trouvé des méthodes qui n'utilisaient pas les limites médiales pour ces convergences[40].

J'avais là un autre exemple de détour bénéfique par des outils abstraits puis du retour à des méthodes plus constructives.

D'ailleurs Henri Cartan a procédé typiquement ainsi pour construire la mesure de Haar sur un groupe localement compact. On utilise traditionnellement pour cela un ultrafiltre qui raffine un filtre canonique puis on montre que cette mesure est unique après normalisation c'est la méthode habituelle[41]. Un autre ultrafiltre aurait donné la même limite, donc il y a convergence du filtre canonique. C'est ce que Cartan a montré en effet, avec une méthode directe et différente[42].

Les spécialistes de la théorie des ensembles savent que pour certains types d'énoncés, s'ils sont vrais avec l'hypothèse du continu ils sont vrais également sans. Le trajet plus constructif qu'on élabore dans un second temps apporte souvent plus d'information.

— Donc le détour par l'abstraction sert à se convaincre de l'existence d'un objet puis la seconde voie, plus proche de la combinatoire des symboles mathématiques et arc-boutée sur les données du problème, se trouve souvent généralisable ou transposable. Je pense au balayage de Poincaré par exemple.

En mathématiques comme en littérature, l'auteur développe un propos bien adapté à son affaire puis le lecteur en fait ce qu'il veut. Le lecteur peut en particulier s'intéresser au domaine de validité maximale

---

[40] Les *limites médiales* inventées par Mokobodzki sont évoquées par Alain Connes dans son dialogue avec J.-P. Changeux (*Matière à pensée*, O. Jacob) pour leur utilité dans les mathématiques qu'il pratique, leur construction est présentée par P. A. Meyer in *Sém. de Probabilités VI*, p.198-204, Lect. Notes in Math. 321, Springer 1973.

[41] voir, par exemple, Bourbaki, Integration, chapitre 7 mesure de Haar., Hermann, 1963.

[42] Note aux CRAS 1957

du raisonnement. Et il est bien rare que ce domaine n'ait pas une structure propre liée au problème. Ça ne marche pas toujours mais lorsque ça marche c'est très satisfaisant.

Par exemple, la propriété d'additivité des réduites, utilisée par Brelot dans sa théorie du potentiel, jouait un rôle fondamental et permettait de résoudre le problème de Dirichlet. J'ai tenté de voir ce qu'on pouvait faire en partant de cette unique propriété, ceci m'a conduit à rechercher et définir la propriété de réduite d'usage plus large et caractéristique de la théorie (linéaire et transiente) du potentiel.

Ainsi se poser la question du domaine naturel d'une propriété qui joue un rôle important dans un domaine et tenter d'y répondre en terme de structure conduit très généralement à sortir des sentiers battus. De ce point de vue dans mes jeunes études j'ai été tout à fait fasciné par le modèle de la théorie spectrale associée aux C^*-algèbres, expression d'une même structure dans des langages différents.

Au lieu d'avoir une vision des mathématiques en progression linéaire on introduit la variété des points de vue.

— Et pour les études des jeunes d'aujourd'hui, quels conseils donnerais-tu ?

Un jeune intéressé par la recherche mathématique est pris dans des circonstances générales. Le nombre de mathématiciens et de publications a tant augmenté qu'il faut trouver un nouveau mode d'existence de la communauté. Aujourd'hui le travail ne peut se faire efficacement qu'en groupe comme cela se passe depuis longtemps en physique. Ce travail plus collectif se fait partiellement dans les séminaires, mais cela n'est pas toujours suffisant pour avoir un compte-rendu de tout ce qui se fait dans un domaine. Pour accéder aux informations on ne pourra se contenter de bases de données et de mots-clés et l'on devra multiplier discussions et contacts entre mathématiciens. Nous avons besoin d'entretenir notre tradition orale. Je vais prendre l'exemple de l'équipe de recherche constituée par Choquet. Elle s'est créée au départ suivant l'idée assez vague de rassembler dans un même lieu des personnes ayant les mêmes sujets d'intérêt et de même culture. Pour un jeune, frapper à une porte voisine pour poser une question, cela se fait naturellement, et évidemment ça fait gagner un temps considérable par rapport à la stratégie du rat de bibliothèque. C'est une forme de travail collectif et de partage des connaissances

La principale difficulté pour un jeune est d'apprécier l'intérêt d'un travail au delà de sa difficulté technique. Or le jugement d'intérêt se construit dans les relations collectives.

Les séminaires, les exposés dans les groupes de travail peuvent être l'occasion d'apprendre des méthodes nouvelles concernant un sujet connu mais il y a aussi l'exposé où on vous décrit un paysage curieux qui ne ressemble à rien de ce que vous connaissez. Ça va enrichir la sensibilité de l'auditeur.

— N'est-ce pas les motivations surtout qu'on transmet, même dans ce cas, ce nouveau paysage, pourquoi a-t-il intéressé l'orateur...

Pour l'orateur qui présente ses propres travaux, il transmet à la fois ses motivations, sa façon de voir, et si possible ses résultats. Il y a plusieurs façons de faire des exposés de séminaire. Je dirais pour un jeune qui présente les travaux d'autrui que le meilleur point de départ pour un exposé de séminaire c'est un texte mal rédigé. Texte où il y a des résultats nouveaux suffisamment intéressants mais sans que l'auteur ait poussé loin l'élucidation, le pourquoi, le comment. L'exposé doit montrer les idées qui sont à l'œuvre, même si leur statut est vague, dégager une trame et faire apparaître une motivation.

Pour ce qui est des jeunes, il faut qu'ils prennent conscience qu'arriver jusqu'à la recherche exige non seulement de plus en plus de connaissances mais de plus en plus de culture. Une recherche réalisée rapidement sur un sujet très pointu n'est pas une formation suffisante. La culture est la condition pour contourner les obstacles varier les stratégies et savoir à qui s'adresser en cas de blocage. Bien sûr publier est un encouragement, Choquet considère qu'il est bon que les jeunes se fassent les dents très tôt à partir de travaux récents.

— Je crois que les jeunes ressentent très fortement la plus grande difficulté à pénétrer dans l'activité professionnelle, et le besoin d'être conforté. Peut-être souhaitent-ils ne pas trop couper avec les applications.

Les applications ! D'abord les mathématiciens n'ont pas le monopole des mathématiques. Les physiciens font souvent d'excellentes mathématiques, nous ne sommes pas une corporation du moyen âge. Maintenant, pour l'avancement de la science, quand des problèmes émergent, il faut n'avoir aucun préjugé quant à leur origine. D'où la nécessité d'une pratique d'information sur les mathématiques suscitées par les autres sciences. De plus, il faut apporter un soutien particulier aux mathématiciens qui veulent jouer le rôle d'intermédiaire entre deux disciplines. Cela compte pour le recrutement des francs-tireurs vis-à-vis des représentants des courants majoritaires. Le cas d'Ecalle est typique par exemple. Au début ses travaux sur les fonctions résurgentes étaient très difficiles à faire valoir car il n'y avait pas d'experts de ces questions.

Souvent, les problèmes que d'autres m'ont proposés ont été plus intéressants du point de vue de mon travail de recherche que ceux que j'ai pu m'inventer tout seul. Cela m'a apporté beaucoup de résoudre des problèmes que je ne m'étais pas posé spontanément. C'est une réponse partielle sur le rôle des applications.

— Ne crois-tu pas que l'époque a tendance à délégitimer la recherche fondamentale. On dénonce aux États-Unis la "curiosity driven research" qui fait dépenser trop d'argent à l'Etat. En France la pression est de plus en plus forte pour resserrer davantage le cycle de l'utilitarisme de la recherche ?

Avec des chercheurs d'autres disciplines et dans le cadre de mes activités syndicales, nous sommes arrivés à une position très nuancée à ce sujet. Il n'y a aucune raison de ne pas accepter des problèmes, comme je l'ai dit, qui viennent de la physique de la chimie ou de l'industrie. La difficulté est d'arriver à une véritable coopération : les ingénieurs qui travaillent dans l'industrie ne peuvent être réduits au rang d'applicateurs, la solution est qu'il y ait des gens de très haut niveau aussi dans l'industrie.

— Je me demande si la différence n'est pas plutôt dans les compétences que dans les niveaux. Dans les entreprises on utilise davantage les qualités humaines, de management, de commandement que des compétences réflexives ou spéculatives. Nous le voyons dans les Écoles d'ingénieurs, les jeunes n'ont pas l'impression que les connaissances scientifiques vont les aider vraiment dans ces situations.

Ce n'est pas seulement un problème de connaissances. Au bout d'un certain temps ce qui va faire la différence c'est s'il y a ou non capacité de recherche. J'entends recherche libre. Il n'y a pas de recherche sans un certain espace de liberté. L'idée qu'on peut complètement diriger ou orienter en vue des applications est fausse. Qui dit recherche dit à mon avis — nécessairement — générosité. Il faut être capable, que ce soit dans des recherches universitaires ou dans l'industrie, de faire du travail désintéressé sans espoir de gain — même de gain de publication — parce que c'est la condition pour de temps à autre faire vraiment œuvre utile. Lorsqu'un cinéaste fait un film on ne voit pas pendant l'heure et demie l'énorme quantité de film qui a été coupée et jetée pour en arriver là. Ce qui a été jeté ce n'était pas du travail pour rien !

Il faut accepter cette générosité pour que la recherche soit féconde. S'il n'y a pas cette générosité, il n'y a pas mobilisation de l'énergie humaine pour arriver au résultat. Et cette philosophie vaut aussi pour les étudiants qui se lancent dans la recherche.

— Il me semble que l'idée que tu viens d'évoquer est très mal comprise par l'opinion.

L'équation que je pose est : espace de liberté = moyen de mobiliser l'énergie individuelle.

J'ai l'impression que les chercheurs ne sont pas seuls concernés.

— L'opinion perçoit les investigations personnelles comme une non-générosité, un repliement sur soi, on n'est plus à l'écoute du social. Alors que pour toi c'est une activité qui investit.

On peut regretter l'existence de la division du travail mais cet un fait. Si l'on veut absolument parler de rentabilité, elle ne se juge pas sur la même échelle de temps. L'industriel va discuter un projet à l'échelle de 5 ans. En matière de recherche c'est une durée trop courte. Premièrement le temps de formation d'un chercheur c'est plutôt de l'ordre de la dizaine d'années. Deuxièmement, dans l'ordre des responsabilités et du choix des hommes, un dirigeant n'est pas en général choisi sur des bouts de période de 5 ans mais sur ce qu'il a développé et réalisé durant de longues années.

— Il semble qu'on a de plus en plus de mal à faire prendre en compte le long terme.

C'est là une contradiction que nos sociétés dites développées doivent résoudre. Plutôt que de jouer la carte de la coopération, elles misent sur une maîtrise de la technologie que n'auront pas les autres sociétés afin de les dominer. Même en se plaçant dans cette logique, on ne peut faire une étude de marché pour savoir si une recherche va déboucher ou non; je parle de recherche fondamentale ou de recherche technologique. Bien sûr la recherche a un coût. La recherche on sait qu'on en a besoin, mais comme elle n'est pas déterminée par un marché, elle n'a pas de prix.

4ème de couverture

Je cherche en zigzags et j'arrive finalement plus près du point départ que je n'avais pensé. Alors j'éprouve le besoin de trouver le plus court chemin conduisant à ce résultat et d'oublier les étapes par lesquelles je suis passé.

Laurent Schwartz

Est-ce qu'on découvre quelque chose ou qu'on l'invente ? A mon avis la question est mal posée et ceux qui répondent dans un sens ou dans l'autre n'ont pas bien compris de quoi il s'agit.

Gustave Choquet

Je ne vais pas aussi loin qu'André Weil. Mais les anciens comptent pour moi. La France est une terre mathématique et elle doit le rester.

Paul Malliavin

Je pense que le plaisir des mathématiques c'est le plaisir de comprendre quelque chose. J'ai souvent peiné sur un article où je voulais comprendre un résultat et tout d'un coup, voilà, on se dit c'est tout simple. C'est le plaisir de comprendre.

Paul André Meyer

A mon avis l'obtention d'un résultat nouveau a plus de valeur, en général, que la découverte d'idées nouvelles qui permettent de généraliser ou simplifier la démonstration de résultats déjà connus.

David Nualart

Des mathématiques abstraites qui ne sont plus "pures". Difficile de gérer ces contradictions, mais l'aventure intellectuelle des mathématiques financières est tout à fait stimulante.

Nicole El Karoui

Quand je travaille, et je tombe sur quelque chose, il me semble que j'ai dévoilé une petite vérité, cachée dans la nature. Mais celle-ci est une constatation sur moi-même. Est-ce qu'il y a une réalité au delà de ça? Je t'en dirai des nouvelles dans la prochaine vie!

Richard Gundy

Un changement d'attitude dans l'écriture vers plus de motivations et moins de technicités est perceptible dans le domaine des mathématiques appliquées. Mais la plupart des mathématiciens ne tentent plus de voir toute la forêt de l'activité mathématique et se contentent de regarder autour de leurs arbres favoris.

Masatoshi Fukushima

Je pense qu'il y a deux sortes d'axiomatisation. M'intéresse celle qui vient après une crise, celle qui met en ordre ce qui était embrouillé et à quoi on ne comprenait rien. L'axiomatisation inutile est celle qui s'attaque à une situation déjà éclaircie en prenant en compte quelques épiphénomènes supplémentaires qui ne changent pas la compréhension générale des choses.

Denis Feyel

Lorsqu'un cinéaste fait un film on ne voit pas pendant l'heure et demie l'énorme quantité de film qui a été coupée et jetée pour en arriver là. Ce qui a été jeté ce n'était pas du travail pour rien ! Il faut accepter cette générosité pour que la recherche soit féconde.

Gabriel Mokobodzki

Sommaire